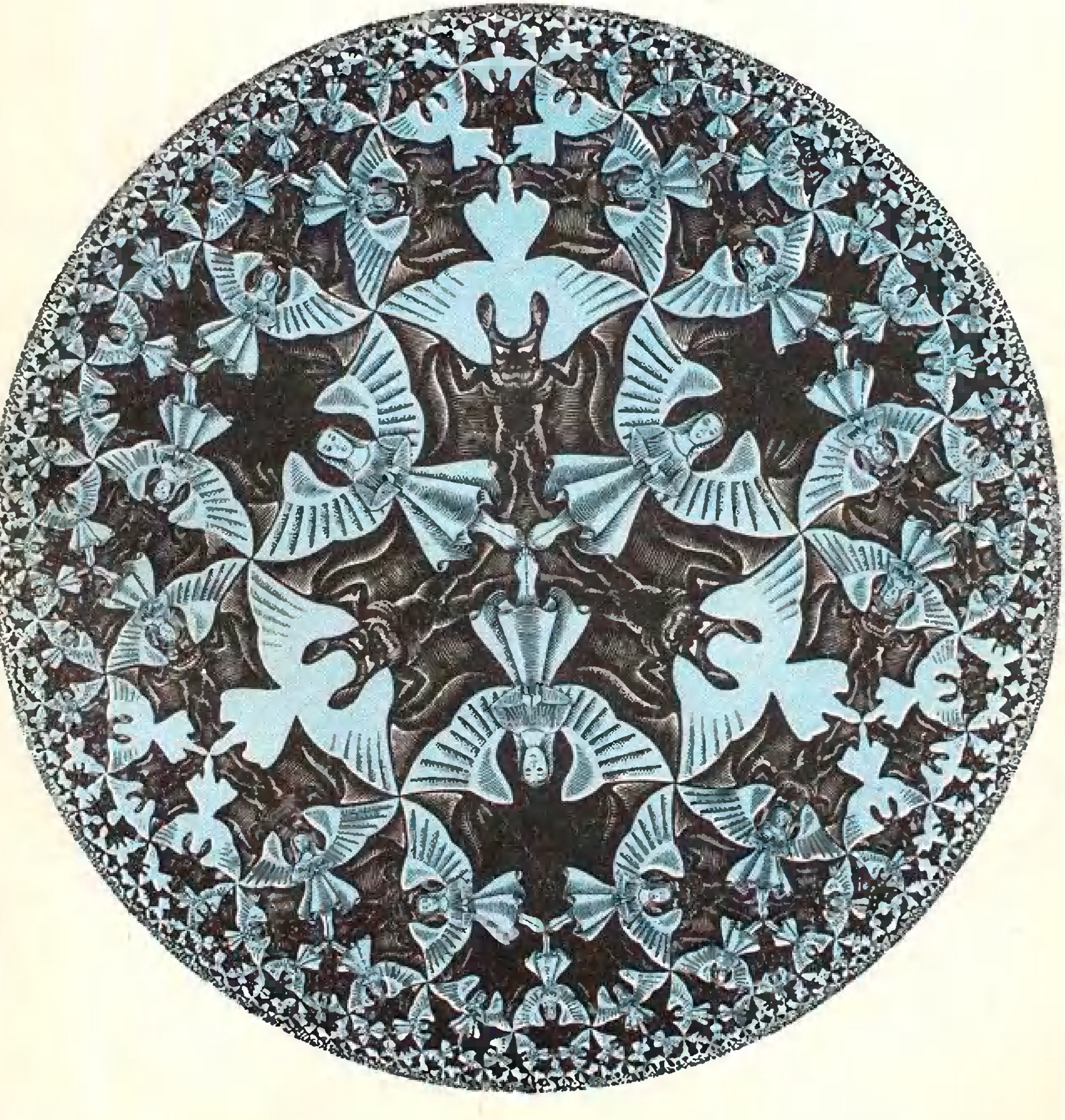
Квант

1976
4

Научно-популярный физико-математический журнал



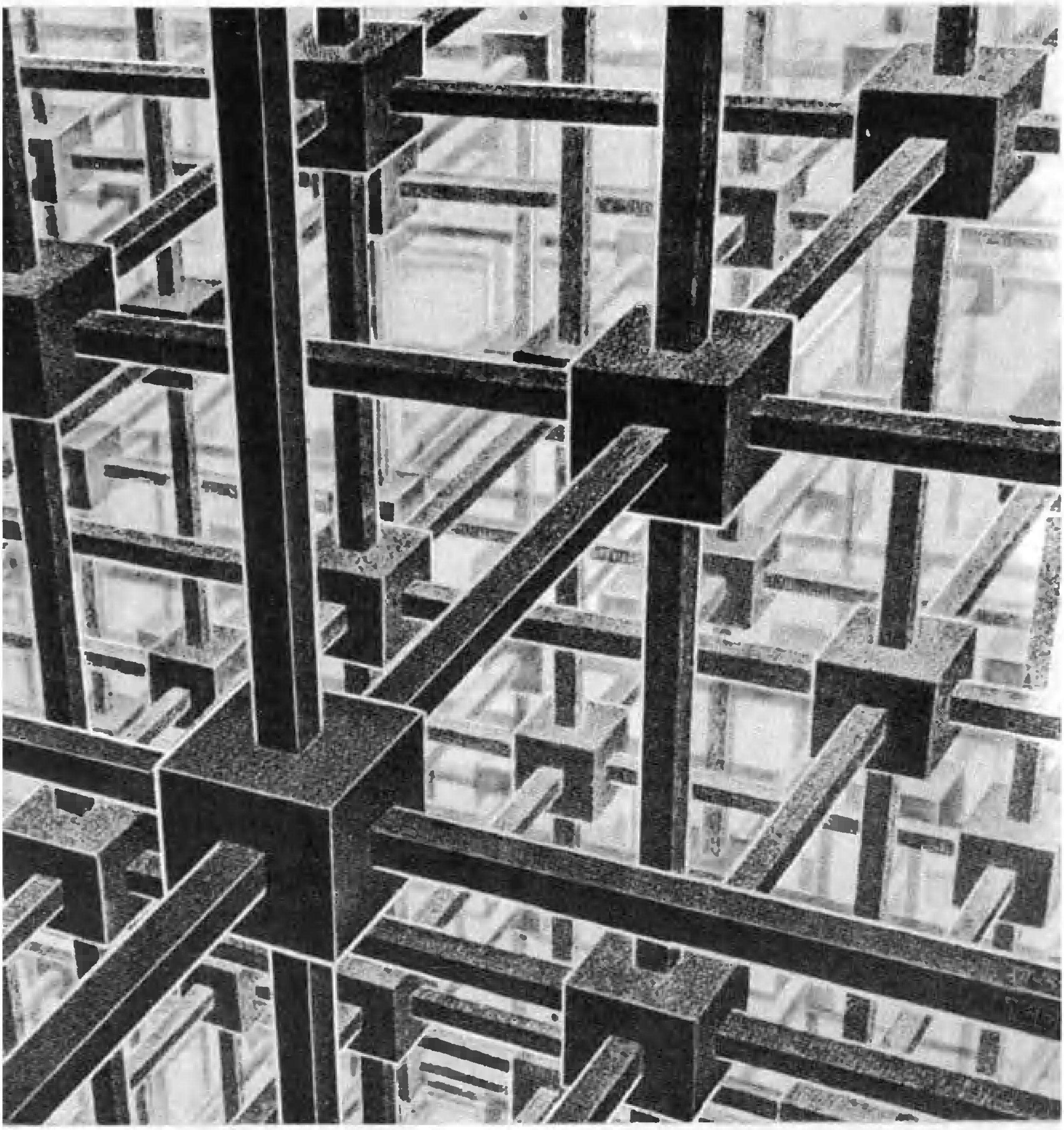


Рисунок М. Эшера «Пространство» дает хорошее представление о кристаллической решетке кубической формы (см. статью на с. 6).

Квант

Основан в 1970 году

1976

4

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ:

В третьем номере журнала мы писали о различных моделях плоскости Лобачевского. В частности, в статье С. Гиндикина рассказывалось о модели Пуанкаре в верхней полуплоскости, а в статье В. Болтянского — о той же модели, но в круге. Замечательному голландскому художнику М. Эшеру удалось разбить плоскость Лобачевского (в модели Пуанкаре внутри круга) на конгруэнтные (разумеется, на плоскости Лобачевского) части двух сортов: «дьяволов» и «ангелов» (см. первую страницу обложки). Эшер назвал эту картину «Рай и Ад».

М. Башмаков

Что такое вектор?

Слово «вектор» встречается в математике, физике и прикладных дисциплинах. Этим словом обозначают совсем разные объекты, не похожие друг на друга. Так, в школьном учебнике геометрии понятие вектора отождествляется с понятием параллельного переноса (плоскости или пространства). В физике при описании ряда величин говорят, что они имеют векторный характер — таковы скорость механического движения, сила притяжения, напряженность магнитного поля. Что же то общее, что позволяет называть все эти объекты одинаково? Как нужно построить математическую теорию, чтобы получившееся понятие обслуживало потребности и математики, и физики? Об этом и рассказывается в статье.

1. Векторное пространство

Математика имеет замечательный способ определять новое понятие, описывая его свойства. Так, например, вместо того, чтобы прямо определить, что такое действительное число (с помощью десятичных дробей или как-нибудь еще), в большинстве книг перечисляют их основные свойства, которыми и пользуются в дальнейшем. Такой подход — он называется *аксиоматическим* — очень распространен в современной математике. Школьный курс геометрии построен именно так. Аналогично поступают и с векторами — перечисляют общие свойства, присущие всем векторным величинам, встречающимся и в математике, и в ее приложениях.

Как и всегда при аксиоматическом подходе, мы будем определять не что такое отдельно взятый, изолированный «вектор», а сразу всю совокупность векторов — *векторное пространство.*

Векторное пространство — это множество M с двумя операциями, удовлетворяющими определенным требованиям *). Одна из этих операций (ее принято называть *сложением*) каждой паре a, b элементов множества M ставит в соответствие третий элемент (этот элемент называется *суммой* элементов a и b и обозначается $a+b$). Вторая операция каждому элементу a множества M и каждому действительному числу λ ставит в соответствие элемент множества M, называемый *произведением* элемента a на число λ (это «произведение» обозначается λa).

Перечислим требования (*аксиомы векторного пространства*), которым должны удовлетворять указанные операции:

1°. Сложение векторов подчиняется сочетательному (*ассоциативному*) и переместительному (*коммутативному*) законам:

$$x+(y+z)=(x+y)+z;$$
$$x+y=y+x.$$

2°. Существует нулевой вектор: 0, такой, что $x+0=x$.

3°. Для каждого вектора существует вектор, сумма которого с исходным вектором есть нулевой вектор.

4°. $(\lambda_1\lambda_2)x=\lambda_1(\lambda_2x)$.

5°. $(\lambda_1+\lambda_2)x=\lambda_1x+\lambda_2x$.

6°. $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$.

7°. $1\cdot x=x$.

Здесь x, y, z — произвольные векторы, λ, λ_1 и λ_2 — любые действительные числа.

2. Примеры векторных пространств

Наиболее привычные для нас векторы — это направленные отрезки на плоскости. Однако устроить из направленных отрезков векторное про-

*) Сравните с определением *кольца* в «Кванте», 1974, № 2, с. 4.

странство совсем не легко. Поэтому мы начнем с более простых примеров.

1. Линейные функции

Рассмотрим всевозможные линейные функции (заданные на множестве $\mathbf{R}$ всех действительных чисел). Каждая такая функция задается правилом: $x \to ax + b$. Понятно, что сумма двух линейных функций есть снова линейная функция. Точно так же, если линейную функцию умножить на число, то получится опять линейная функция. При этом все аксиомы 1°—7° выполняются, и таким образом, множество линейных функций с этими операциями является векторным пространством.

2. Параллельные переносы

Рассмотрим множество всех параллельных переносов плоскости. Их можно складывать, последовательно выполняя друг за другом, умножать на числа. С этим векторным пространством вы и встречаетесь в школе.

3. Пространство строк

Рассмотрим строки фиксированной длины n из действительных чисел: $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Определим сложение строк и умножение их на числа *поэлементно*:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n);$$

$$\lambda (a_1, a_2, \ldots, a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n).$$

Очевидно, что строки длины n с так определенными операциями образуют векторное пространство.

4. Квадратные трехчлены

Множество квадратных трехчленов $\{ax^2 + bx + c\}$ (числа a, b, c могут быть и нулями) также образует векторное пространство по отношению к обычным операциям сложения многочленов и умножения их на числа.

5. Многочлены

Множество в с е х многочленов с теми же операциями тоже образует векторное пространство.

6. Функции

Все функции, заданные на каком-то числовом множестве $\mathbf{A}$, образуют векторное пространство по отношению к обычному сложению и умножению на числа.

7. Свободные векторы

Сконструируем теперь векторное пространство из направленных отрезков на плоскости. Каждый направленный отрезок задается *упорядоченной* парой точек — началом и концом. Каждой такой паре точек (A, B) можно сопоставить параллельный перенос плоскости. Из геометрии известно, что существует единственный параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку B. В то же время ясно, что разные пары точек (A_1, B_1) и (A_2, B_2) могут задавать один и тот же перенос. Для этого необходимо и достаточно, чтобы отрезки A_1B_1 и A_2B_2 имели одинаковую длину и были одинаково направлены. Объединим теперь все направленные отрезки, задающие один и тот же параллельный перенос, в один класс: мы получим *взаимно однозначное соответствие* между такими классами и параллельными переносами. Один такой класс направленных отрезков называют *свободным вектором* (в отличие от фиксированного направленного отрезка — связанного вектора). Складывать и умножать на число свободные векторы надо так, как складывают параллельные переносы. Вот как выглядит сложение свободных векторов графически: в одном классе выбирают произвольный направленный отрезок AB, затем во втором классе находят отрезок с началом в точке B (т. е. от B откладывают направленный отрезок, принадлежащий второму классу), и если точка C — конец второго отрезка, то AC — направленный отрезок, принадлежащий классу, соответствующему сумме векторов. Постарайтесь самостоятельно доказать, что это определение суммы корректно, т. е. что результат не зависит от того, какой направленный отрезок из первого класса мы выбираем. Дайте графическое определение умножения на число. (Обращаться со свободными векторами трудно потому, что каждый из них представляет целый класс направленных отрезков. Графически же мы всегда изображаем каждый класс каким-то одним отрезком, выбирать который мы можем по своему произволу. Поэтому приходится проверять, что результат не зависит от произвольно выбранных нами представителей.)

3. Координаты

Вернемся к нашему первому примеру — векторному пространству линейных функций.

Рассмотрим две функции:

$$f_1: x \to x,$$
$$f_2: x \to 1.$$

Любая функция $f: x \to ax+b$ может быть представлена в виде линейной комбинации этих функций: $f=af_1+bf_2$. Пара чисел (a, b) называется *координатами* линейной функции f.

Замечательно то, что при сложении линейных функций их координаты складываются, как строки:

$$f_1: x \to ax+b \leftrightarrow (a, b),$$
$$f_2: x \to cx+d \leftrightarrow (c, d),$$
$$f_1+f_2: x \to (a+c)x+(b+d) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (a+c, b+d);$$

но

$$(a+c, b+d) = (a, b) + (c, d).$$

Приведем еще несколько примеров. В векторном пространстве параллельных переносов плоскости можно выбрать два параллельных переноса (например, на два непараллельных вектора длины 1), по которым раскладывается любой перенос; коэффициенты этого разложения называются *координатами* соответствующего переноса.

Рассмотрим в векторном пространстве строк длины $n = 4$ строки

$$f_1 = (1, 0, 0, 0), \quad f_2 = (0, 1, 0, 0),$$
$$f_3 = (0, 0, 1, 0), \quad f_4 = (0, 0, 0, 1).$$

Любую строку $f = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ мы можем представить в виде

$$f = a_1f_1 + a_2f_2 + a_3f_3 + a_4b_4;$$

числа (a_1, a_2, a_3, a_4) называются координатами строки f.

В векторном пространстве квадратных трехчленов для произвольного трехчлена $f = ax^2+bx+c$ имеем: $f = af_1+bf_2+cf_3$, где $f_1 = x^2$, $f_2 = x$, $f_3 = 1$; числа (a, b, c) — координаты трехчлена f.

В пространстве же всех многочленов придется взять бесконечно много многочленов:

$$f_0 = 1,\ f_1 = x,\ f_2 = x^2,\ \ldots, f_n = x^n, \ldots.$$

Тогда любой многочлен F запишется в виде конечной линейной комбинации выбранных многочленов; коэффициенты разложения многочлена F по многочленам $f_0, f_1, \ldots$ — это его координаты:

$$F(x) = a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots$$
$$\ldots + a_1x + a_0 = a_mf_m + a_{m-1}f_{m-1} + \ldots$$
$$\ldots + a_1f_1 + a_0f_0 \leftrightarrow (a_m, a_{m-1}, \ldots, a_1, a_0).$$

Теперь мы уже можем задать ряд вопросов. Как в данном пространстве выбрать систему векторов, по которой раскладывался бы любой вектор этого пространства? Когда эту систему можно выбрать конечной? В какой мере разложение однозначно? И как связаны между собой коэффициенты разложения по разным системам векторов?

Ответы на эти вопросы дает раздел математики, именуемый *линейной алгеброй*. Вот краткий обзор некоторых результатов.

1. Векторные пространства бывают *конечномерные* и *бесконечномерные*. В конечномерных существуют к о н е ч н ы е системы векторов, по которым раскладывается любой вектор пространства. В наших примерах пространства линейных функций, квадратных трехчленов, строк, параллельных переносов и свободных векторов — конечномерные. Пространства же всех многочленов и всех функций бесконечномерны.

2. Для конечномерного пространства можно указать наименьшее число n такое, что существует n векторов, по которым раскладывается любой вектор пространства. Это число n называется *размерностью* пространства. Так, пространство линейных функций имеет размерность 2, пространство квадратных трехчленов

трехмерно, а пространство строк длины n имеет размерность n.

3. Если в n-мерном пространстве мы возьмем систему из векторов f_1, $f_2, \ldots, f_n$, по которым раскладывается любой вектор пространства, то коэффициенты разложения определяются однозначно. Система векторов $f_1, f_2, \ldots$ $\ldots, f_n$ называется *базисом* пространства, а коэффициенты разложения $f =$ $= a_1f_1 + a_2f_2 + \ldots + a_nf_n$, т. е. числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, называются *координатами вектора f в базисе $f_1, f_2, \ldots, f_n$*. Базисов существует бесконечно много. Формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в разных базисах, довольно громоздки.

4. Дальнейшая программа

Мы начали с того, что выделили основные свойства векторных величин — возможность их сложения и умножения на числа — и пришли к понятию векторного пространства. В математике и ее приложениях встречается очень много разнообразных, не похожих друг на друга векторных пространств. Естественно ожидать, что после общего описания векторных пространств последует какая-то их классификация, связанная с рассмотрением новых, дополнительных свойств. Например, мы до сих пор еще не говорили об *углах* между векторами и о *длинах* векторов. В примерах векторных величин, взятых из геометрии, это сделать легко. А как, скажем, определить угол между двумя квадратными трехчленами? И можно ли вообще говорить о длине, если в качестве вектора берется, например, произвольная функция? Эти вопросы очень подробно изучены в математике. Мы расскажем о том, как можно вводить в векторном пространстве углы и расстояния, в отдельной статье.

Наиболее интересным и важным в теории векторных пространств является изучение *отображений* одних пространств в другие. Этими вопросами занимается раздел математики, называемый *функциональным анализом*. В этом разделе много красивых результатов и еще больше нерешенных трудных задач.

Упражнения

1. Рассмотрим множество всех функций, заданных на $\mathbf{R}$, графики которых проходят через заданную точку A. Образуют ли такие функции (по отношению к сложению функций и умножению их на числа) векторное пространство, если точка A имеет координаты: а) $(0; 0)$, б) $(1; 0)$, в) $(0; 1)$?

2. Изобразим линейную функцию f: $x \to ax + b$ точкой обычной координатной плоскости с координатами (a, b).

а) Как будут изображаться линейные функции, обращающиеся в ноль при $x = 1$?

б) Предыдущую задачу можно сформулировать так: на плоскости (a, b) изобразить прямые $y = ax + b$, проходящие на плоскости (x, y) через точку $(1; 0)$. Изобразите теперь на плоскости (a, b) прямые $y = ax +$ $+ b$, проходящие через какую-либо точку отрезка $[0, 1]$ оси ординат плоскости (x, y).

3. а) Мы указали в пространстве линейных функций такой базис $f_1 = x$, $f_2 =$ $= 1$. Проверьте, что функции f_1: $x \to x + 1$, f_2: $x \to x - 1$ также образуют базис.

б) Найдите необходимое и достаточное условие того, чтобы две линейные функции f_1: $x \to a_1x + b_1$ и f_2: $x \to a_2x + b_2$ составляли базис пространства всех линейных функций.

4. Докажите, что в пространстве квадратных трехчленов нельзя указать два квадратных трехчлена f_1 и f_2 таких, что всякий трехчлен f можно было бы записать в виде их линейной комбинации: $f = a_1f_1 + a_2f_2$, т. е. что это пространство не является двумерным.

5. Докажите, что в пространстве строк длины $n = 4$ векторы $f_1 = (1, 0, 0, 0)$, $f_2 =$ $= (1, 1, 0, 0)$, $f_3 = (1, 1, 1, 0)$, $f_4 = (1, 1,$ $1, 1)$ образуют базис. Обобщите теорему на произвольное n.

Я. ГЕГУЗИН

КЛАССИЧЕСКИЕ ОПЫТЫ С КРИСТАЛЛАМИ

Каким должен быть опыт, чтобы заслужить высший титул — *классический?* Быть простым и красивым? Неожиданным по постановке и по полученному результату? Оказавшим большое влияние на развитие какой-то области науки? Проиллюстрировавшим фундаментальный закон природы? Видимо, все эти признаки в различной степени присущи классическому опыту.

Я хочу рассказать о двух опытах, которые были поставлены выдающимися советскими физиками академиками Абрамом Федоровичем Иоффе и Петром Ивановичем Лукирским. Оба опыта, безусловно, заслуживают этого высшего титула.

I. ЭФФЕКТ ИОФФЕ

История открытия и утверждения эффекта, носящего имя одного из патриархов советской физики академика А. Ф. Иоффе, содержит все то, чем богата логика живой науки и манящa деятельность ученого. В этой истории и рождение проблемы, когда обнаруживается кричащее противоречие между идеями и фактами; и неожиданность озарения, когда кажется, что загадка оборачивается ясностью; и эксперимент — красивый и настолько простой, что у каждого возникает ощущение сопричастности к замыслу эксперимента, уверенность, что и он придумал бы этот эксперимент, если бы ранее его не придумал и осуществил тот, с чьим именем эксперимент вошел в науку. В истории эффекта Иоффе есть место для деятельности и добросовестно заблуждавшихся научных оппонентов, и активных газетных репортеров, неуемно и без достаточных оснований фантазирующих на тему «эффект и будущее»; и высшая награда ученому, когда его идеи со страниц академических научных журналов перекочевывают на страницы учебников и в графы карточек цеховых технологических процессов.

Внешне эффект выглядит очень неожиданно: если кристалл каменной соли (химическая формула $NaCl$) смочить водой, его прочность на разрыв становится во много раз больше прочности сухого кристалла. Казалось бы, прочность — объемное свойство кристалла и она не должна зависеть от того, что происходит на поверхности кристалла. А на поверку оказывается, что соседство с водой резко упрочняет каменную соль, причем эффект наблюдается и для толстого, и для тонкого образцов.

Противоречие между теорией и экспериментом

Начало истории эффекта Иоффе можно датировать 1915 годом. В этом году выдающийся немецкий физик-теоретик Макс Борн опубликовал строгую теорию кристаллов. Собственно, в этой теории впервые и было введено представление о кристаллах, состоящих из ионов, которые взаимодействуют друг с другом электростатическими силами (по закону Кулона). Сказанное в последней фразе для нас сейчас звучит азбучной истиной, а тогда, в 1915 году, всего через три года после того, как с помощью рентгеновских лучей впервые убедились в строгой периодичности чередования атомов в кристалле, мысли о ионной структуре кристалла были откровением.

Теория Борна, математически стройная и внутренне непротиворечивая, многими экспериментами подтверждалась. Борн сумел объяснить оптические, электрические и многие другие свойства разных кристаллов. В противоречии с его теорией оказались лишь данные о прочности кристаллов. Например, было известно, что кристалл каменной соли разрушается, когда его деформация достигает такого значения, что возникающее напряжение*) становится равным приблизительно $4{,}5 \cdot 10^6$ *н/м*^{2}. А точный и последовательный расчет теоретика предсказывал существенно иную величину — приблизительно $2 \cdot 10^9$ *н/м*^{2}, что чуть ли не в 500 раз больше экспериментального значения.

Сохранив идею, упростим точный расчет и попытаемся приближенно

---

*) Напомним, что механическим напряжением σ называют величину, измеряемую отношением модуля силы упругости $F_{упр}$ к площади поперечного сечения образца S: $\sigma = F_{упр}/S$. Максимальное значение напряжения, после которого образец разрушается, называют пределом прочности $\sigma_{пр}$.

оценить величину предела прочности кристалла.

Предел прочности кристалла есть отношение силы, при которой он разрывается, к площади сечения, по которому произошел разрыв: $\sigma_{пр}=F/S$. Естественно считать, что сила F есть сумма сил f, действующих на каждую из n пар взаимодействующих ионов: $F=nf$. Если площадь сечения образца в месте разрыва S, а расстояние между ионами (постоянная решетки) a*), то $n=S/a^2$. А так как кристалл ионный и сила взаимодействия между ионами описывается законом Кулона, то

$$f=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a^2},$$

где q — абсолютная величина заряда иона.

Итак,

$$\sigma_{пр}=\frac{F}{S}=\frac{nf}{S}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a^4}.$$

В кристаллах NaCl заряд иона совпадает с зарядом электрона, т. е. $q=e=1{,}6\cdot10^{-19}$ *к*, величина $a=5{,}3\cdot10^{-10}$ *м*, следовательно, $\sigma_{пр}\approx2{,}6\cdot10^{9}$ *н/м*^{2}. Эта величина близка к следующей из точной теории.

Простота и очевидность сделанной оценки не должны в глазах читателя умалить проницательность теоретика. Полвека спустя нам легко и просто понять идею расчета, так как за нами величие Борна. Он же в 1915 году, не имея предшественников, мыслил независимо и революционно. Борн был великим мастером.

Осмысливая противоречия между точным расчетом и экспериментальными данными, Иоффе должен был обсудить следующие возможности: ошиблись либо теоретик, либо экспериментатор. Второе предположение следовало отбросить, не колеблясь, потому что даже если бы произошло невероятное и лабораторные исследователи ошиблись в 500 раз, их поправила бы многовековая практика обращения человека с кристаллами NaCl. Если, действительно, их прочность была бы в согласии с теорией, то не так просто было бы добыть в штольне соляную глыбу, орудуя киркой, и не простой была бы задача истолочь эту глыбу в порошок. В 500 раз экспериментаторы не ошиблись!
И теоретик вряд ли ошибался так сильно: и мысли его логичны, и многие иные факты он объяснил весьма успешно.

Истину следовало искать где-то в другом месте. Вот здесь необходимо озарение, нужен неожиданный взгляд на сложившуюся ситуацию. Абрама Федоровича Иоффе озарила блестящая идея.

Неожиданная идея

Иоффе рассуждал так: теоретик не ошибается, но рассчитывает он идеальную ситуацию, когда *одновременно* прекращаются взаимодействия всех n пар ионов. А если это происходит не одновременно, т. е. связи между ионами рвутся последовательно друг за другом? Тогда, очевидно, разрушение образца будет происходить не мгновенно, и при этом возникающее напряжение будет значительно меньше того, которое следует из теории.

Иоффе придумал конкретную причину требующейся ему неодновременности разрыва связей. Он предполо-

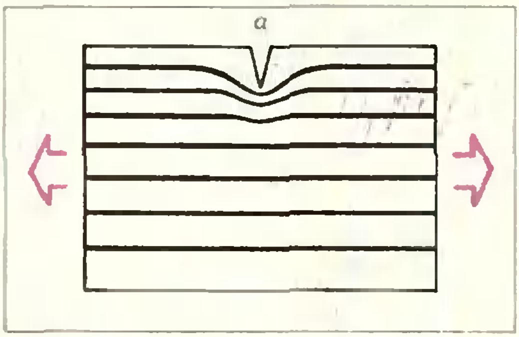


Рис. 1.

*) Каменная соль (NaCl) имеет кристаллическую решетку кубической формы — чередующиеся ионы натрия и хлора располагаются в вершинах кубов.

жил, что на поверхности кристалла имеются микроскопические трещинки. При нагружении кристалла до величины ниже «теоретической» прочности в устье трещины (область *a* на рисунке 1), в маленьком объеме кристалла, могут возникнуть напряжения, при которых связи между ионами начнут разрушаться. А это значит, что трещина будет распространяться в глубь образца, пронижет его и расчленит на две части. Но кристалл разрушится не потому, что в плоскости разрыва одновременно порвались все связи, а потому, что последовательное разрушение связей дало возможность трещине вырасти и расчленить кристалл.

То, как Иоффе представлял себе механизм разрушения кристалла, можно наглядно проиллюстрировать модельным опытом. Он прост, и его результаты не оставляют сомнений. На предметном столике микроскопа растягивалась тонкая пластинка плексигласа, на боковом торце которой сделан острый и неглубокий надрез. Пластинка моделирует кристалл, надрез — трещину на его поверхности. При специальном освещении (в поляризованном свете) можно отличить напряженные участки в плексигласе: чем больше напряжение, тем соответствующий участок темнее. Так вот, на последовательности кадров заснятого нами кинофильма (рис. 2) видно, что в устье надреза напряжения действительно максимальны и что пластинка разрушается вследствие движения напряженного устья сквозь нее. Причем происходит это при напряжениях, значительно меньших тех, которые необходимы для разрушения пластинки без надреза.

В упрощенном варианте подобный опыт вы можете сделать сами, не прибегая ни к микроскопу, ни к поляризованному свету, ни к кинокамере. Вы просто можете убедиться в том, что порвать полоску бумаги, растягивая ее, намного легче, если предварительно сделать на ней маленький надрез.

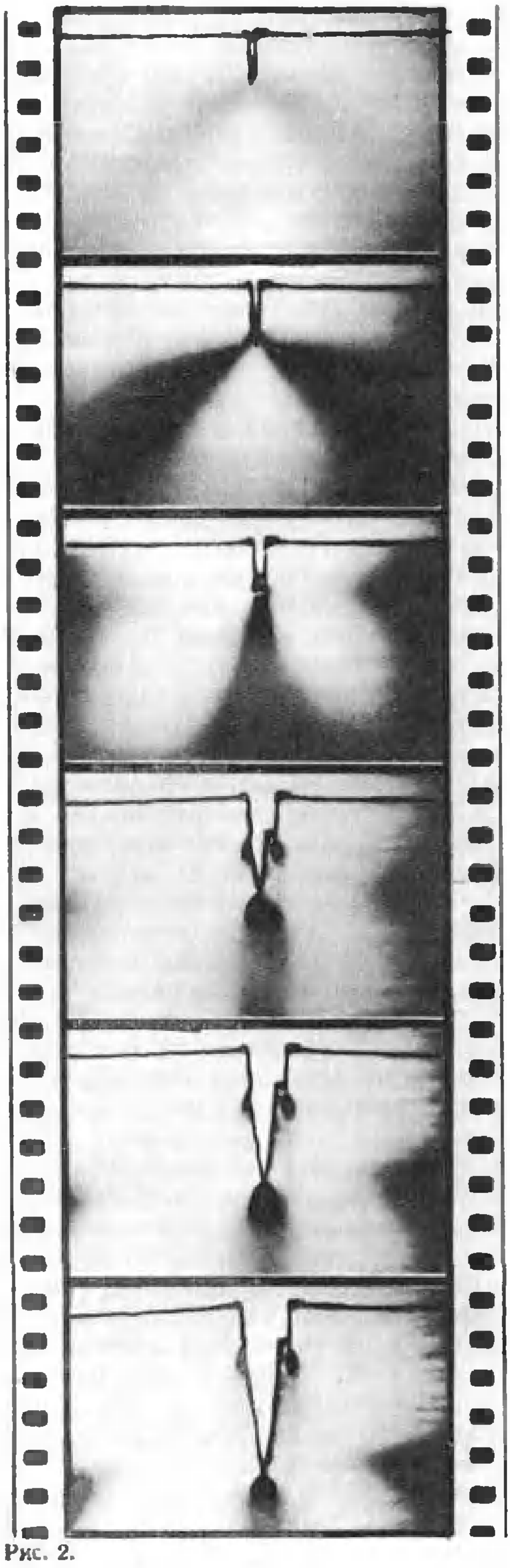


Рис. 2.

Опыт Иоффе

Итак, гипотеза есть, нужен опыт, проверяющий ее. Идею опыта подсказывала прямолинейная логика: если действительно поверхностные трещины — истинная причина почти пятисоткратного понижения прочности, то, удалив тонкий слой кристалла, в котором расположены трещины, мы вправе ожидать, что прочность кристалла возрастет в пятьсот раз! Логика дает это право, а скепсис возражает против него.

Иоффе поставил следующий опыт. Он растягивал монокристальный образец каменной соли в условиях, когда часть образца была в воздухе, а часть омывалась теплой водой, которая постепенно растворяла кристалл и делала его тоньше. Результат опыта оказался в согласии с предсказаниями логики: образец разрушился в сухой части при напряжении $\approx 4{,}5 \cdot 10^6$ *н/м*^{2}. Погруженная в воду более тонкая часть образца выдерживала напряжения до величины $1{,}6 \cdot 10^9$ *н/м*^{2}, которая не так уж далека от «теоретического» предела прочности, равного $2 \cdot 10^9$ *н/м*^{2}.

Видимо, красивым можно считать и такой опыт, который легко побеждает наш скепсис. В этом смысле опыт Иоффе безусловно красив!

Опыт (он был проведен в 1924 году), давший убедительный результат, естественно привлек к себе внимание и специалистов, и «околонаучных кругов».

Газеты и научно-популярные журналы наперебой рассказывали своим читателям о фантастических последствиях увеличения прочности материалов: мосты из проволок, сверхлегкие самолеты, автомобили, пароходы и т. п. В книге «Моя жизнь и работа» А. Ф. Иоффе с возмущением писал по этому поводу: «...между наблюдением исключительной прочности кристалла каменной соли и получением такой же прочности технических материалов — громадный путь».

Возражения оппонентов

В научных журналах появились статьи, а на научных конференциях — выступления, которые, не ставя под сомнение результаты опытов по разрыву «мокрых» кристаллов, опровергали предлагавшееся Иоффе толкование причины влияния воды на прочность каменной соли.

Например, австрийский кристаллофизик Смёкал, известный своими исследованиями структуры кристаллов, на конференции в Лондоне утверждал, что в опытах Иоффе прочность соли меняется в связи с тем, что вода проникает в соль и делает ее более прочной. Это утверждение было убедительно опровергнуто с помощью многочисленных опытов, поставленных в Ленинграде, в лаборатории Иоффе. Расскажем о двух из них. Один заключался в простом повторении опыта по разрыву образца, погруженного в воду. Была видоизменена лишь одна деталь: часть поверхности, находящейся в воде, была защищена от воды полоской нерастворимого лака. В этом случае эффект исчезал, прочность кристалла не повышалась. Согласно идее Смекала через защищенную поверхность вода могла поступать в кристалл и упрочнять его, но то обстоятельство, что на небольшом участке поверхности сохранились поверхностные трещины, делало кристалл уязвимым, малые нагрузки его разрушали. Идея Смекала явно оказалась несостоятельной.

Второй опыт был неожиданным по замыслу. Монокристальный шарик каменной соли предварительно охлаждался в жидком воздухе, а затем быстро погружался в расплавленное олово или свинец. Внешние слои шарика быстро нагревались, расширялись и растягивали во всех направлениях внутреннюю, еще не прогревшуюся часть шарика. Теоретики подсчитали, что в центре шарика возникали напряжения до $7 \cdot 10^8$ *н/м*^{2}, между тем шарик не разрывался. Дело в том, что эти напряжения возникали внутри шарика, а поверхностные слои оставались недостаточно напряженными. Трещины не росли, и кристалл сохранял целостность.

Были и иные возражения против предложенных Иоффе объяснений. Его лаборатория спорила с оппонентами, проводя множество контрольных опытов, отстаивая (и отстояв) и существо эффекта, и его толкование.

Но все-таки возникает вопрос: почему трещины на поверхности кристалла оказались определяющими его прочность? Неужели объемная структура образца абсолютно бездефектна, свободна от «объемных» трещин, которые были бы одинаково безразличны и к наличию, и к отсутствию воды на поверхности образца? Действительно, могло бы оказаться и так, что роль поверхностных трещинок не была бы определяющей. Могло бы, а вот в случае соли не оказалось!

Быть может, это обстоятельство умаляет значимость и общность эффекта? Быть может, речь идет о случайной находке экспериментатора, находке, имеющей ограниченный, частный интерес? Конечно же, нет! Речь идет о другом. Благодаря тому, что отыскался объект, где поверхностные трещинки себя проявляют предельно отчетливо, физика обогатилась ясным пониманием возможного влияния поверхностных дефектов на механические свойства кристаллов. Кусочек истинной правды о законах природы оказался заключенным в «эффекте Иоффе».

Абрам Федорович Иоффе был счастливым ученым, он видел при жизни учебники физики с параграфом «эффект Иоффе» и видел карточки тех цеховых технологических процессов, в которых достигается значительное упрочнение изделий вследствие удаления трещин с поверхности.

II. ОПЫТ ЛУКИРСКОГО

Война, 1943 год, большая комната в Казанском университете шкафами условно разделена на несколько маленьких, в каждой из них — группа физиков Ленинградского физико-технического института, эвакуировавшегося в Казань. В одной из импровизированных лабораторий — сотрудники профессора Петра Ивановича Лукирского. Много дел связано с работой на оборону, ими и занят профессор со своими сотрудниками. Но как дань естественной любознательности ищущего ученого — опыты с монокристаллами каменной соли. Они стали классикой кристаллофизики, о них я и хочу рассказать.

И по замыслу, и по осуществлению эти опыты тождественны и отличаются лишь объектом исследования, точнее, формой изучавшегося образца.

Один вариант опыта был таким. Длительному высокотемпературному отжигу подвергался тщательно отполированный цилиндр, изготовленный из монокристалла каменной соли; ось цилиндра была ориентирована параллельно ребру куба естественной огранки кристалла. Если до отжига цилиндр бесшумно скатывался по слегка наклоненной поверхности стекла, то после отжига скатывание сопровождалось равномерным постукиванием, как если бы на поверхности цилиндра появились ребра — четыре ребра, равно отстоящие одно от другого. Эти ребра можно было и увидеть, рассматривая отожженный цилиндр в отраженном свете.

В другом варианте опыта такому же отжигу подвергалась тщательно отполированная монокристальная сфера. После отжига на ее поверхности можно было отчетливо увидеть в отраженном свете фигурные блики (рис. 3) *); до отжига их не было.

*) На приведенной фотографии вы видите блики различной формы. Это связано с тем, что в кристаллах существуют оси симметрии разного порядка. (*Некоторая прямая называется осью симметрии k-го порядка для данного тела, если при повороте тела вокруг этой прямой на угол $360°/k$ оно совмещается с самим собой.*) В частности, эллиптический блик соответствует оси симметрии второго порядка, а квадратный блик — оси симметрии четвертого порядка.

Рис. 3.

Результат обоих опытов можно сформулировать так: кристаллы каменной соли, которым принудительно придана не свойственная им цилиндрическая или сферическая форма, стремятся к восстановлению формы куба — своей естественной огранки, или, как говорят кристаллографы, «естественного габитуса». Высокая температура в этих опытах нужна лишь для того, чтобы придать активность какому-нибудь механизму переноса массы кристалла, необходимого для формирования «естественного габитуса». Кристаллы, разумеется, «предпочтут» тот из механизмов, который даст им возможность поскорее избавиться от принудительно заданной формы и восстановить свою естественную форму.

Почему же кристалл стремится к естественной огранке? Оказывается, среди несметного числа прочих мыслимых именно она обеспечивает наименьшую поверхностную энергию кристалла при заданном его объеме *). А именно минимум энергии характерен для равновесного, т. е. наиболее естественного, состояния кристалла. Математически такое поведение кристалла описывается правилом Кюри—Вульфа. Его можно сформулировать так: если кристалл имеет объем V, огранен n гранями, его i-я грань имеет поверхность s_i и поверхностную энергию α_i, то

$$\sum_{i=1}^{n} s_i\alpha_i \to \text{minimum} \quad \text{при} \quad V = \text{const}.$$

В этой записи стрелкой обозначено стремление кристалла сделать свою суммарную поверхностную энергию минимальной при условии, что объем постоянен. Опыт Лукирского сделал зримым то, что символически обозначается стрелкой.

Мудрое правило Кюри—Вульфа может показаться противоречащим не менее мудрому утверждению геометрии, согласно которому из всех тел данного объема минимальную поверхность имеет сфера. Поэтому, если сферический монокристалл стремится к уменьшению поверхностной энергии, ему, казалось бы, не следует ограняться, так как при этом его поверхность лишь увеличится. Поверхность и в самом деле увеличится — геометрия права. А вот энергия уменьшится, потому что при огранении исчезают участки поверхности, которые имеют большую удельную поверхностную энергию (т. е. поверхностную энергию, отнесенную к единице площади поверхности), и развиваются поверхности, представленные в естественной огранке, которые имеют меньшую поверхностную энергию. И этот эффект играет бо́льшую роль, чем эффект увеличения поверхности. Увеличивается поверхность, а энергия при этом уменьшается! Процесс преобразования формы и цилиндра, и шара происходит так, что на каждом из последующих этапов энергия их

*) Поверхностная энергия кристалла — это, прежде всего, энергия взаимодействия атомов, находящихся на его поверхности.

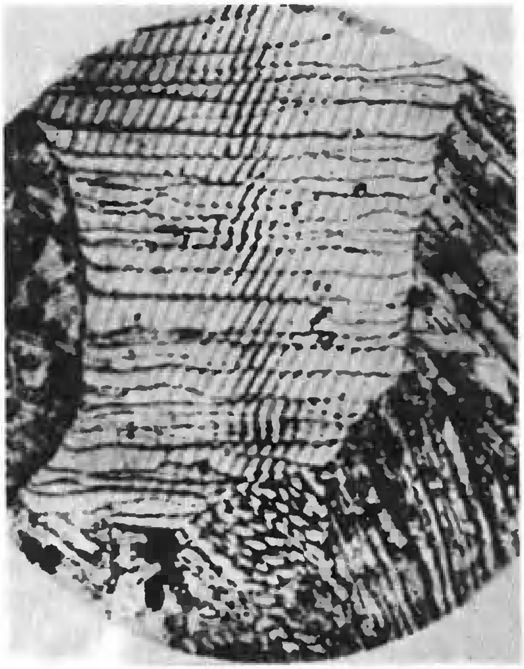


Рис. 4.

поверхностей меньше энергии на предыдущем этапе.

Опыты Лукирского очень зримо качественно проиллюстрировали основную тенденцию, которой следуют кристаллы, самопроизвольно преобразуя собственную форму. Эти опыты вызвали множество других, в которых этот процесс продолжал изучаться. Ставились, например, такие опыты. Тщательно полировали плоскость произвольного сечения кристалла, но при высокой температуре ее зеркальная гладь нарушалась, появлялись различные элементы так на-

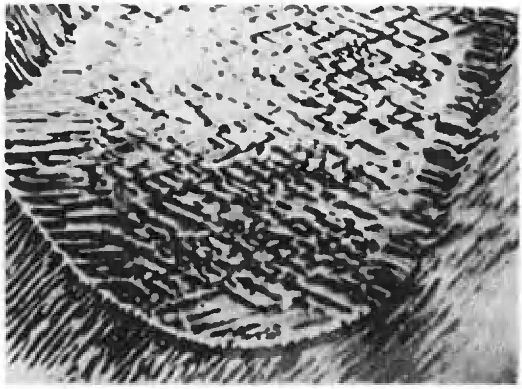


Рис. 5.

зываемой «естественной шероховатости».

На стене нашей лаборатории много лет висят фотографии поверхностей кристаллов. Посмотрите на фотографию кристалла меди, приведенную на рисунке 4. Она у нас называется «лестница петергофского фонтана»— на ней отчетливо видны чередующиеся светлые и темные полосы, действительно напоминающие лестницу, по которой сплошным потоком течет вода. Поверхность среза кристалла была тщательно отполирована, а после отжига она стала шероховатой, превратилась в совокупность ступеней, ребра которых направлены так же, как и ребра в ограненном монокристалле меди.

Другая фотография поверхности кристалла (рис. 5) называется «палаточный городок». На ней видна совокупность остроконечных трехгранных выступов, которые ограничены теми же плоскостями, что и равновесной монокристалл.

Почему же кристалл, рассеченный по произвольной плоскости, не ограняется в целом, подобно сфере в опыте Лукирского, а допускается формирование «петергофской лестницы» и «палаточного городка»? Да просто потому, что и «лестница», и «городок»— лишь этапы на пути к истинному равновесию, этапы, которые достигаются быстрее, при меньшем переносе массы, чем истинно равновесная форма всего кристалла. И на поверхности образцов Лукирского можно было наблюдать промежуточные формы. Однако, благодаря тому, что при высокой температуре у кристаллов каменной соли быстро осуществляется нужный перенос массы, в опытах Лукирского процесс стремления к равновесной форме зашел настолько далеко, что можно было на сфере наблюдать блики, а при качении цилиндра — слышать постукивание.

В. Левин

Парабола и неравенства

Прародителем всех тождественных неравенств является тот факт, что квадрат любого действительного числа неотрицателен: $x^2 \geqslant 0$. Этот факт можно сформулировать еще так: график функции $y = x^2$ (парабола) не проходит ниже оси абсцисс (рис. 1). Знак равенства в неравенстве $x^2 \geqslant 0$ имеет место только при $x = 0$ (парабола $y = x^2$ касается оси абсцисс в начале координат).

В этой заметке мы расскажем о том, как, исходя из этого элементарного неравенства, можно постепенно получить неравенства более сложные.

1. Рассмотрим квадратный трехчлен

$$y = Ax^2 + 2Bx + C, \quad A \neq 0;$$

графиком его также является парабола. Найдем необходимые и достаточные условия того, чтобы для всех действительных значений x выполнялось неравенство

$$Ax^2 + 2Bx + C \geqslant 0. \qquad (1)$$

Эти условия находятся очень легко. Во-первых, необходимо, чтобы A было положительным, так как при $A < 0$ всегда существуют значения x, для которых неравенство (1) заведомо неверно (это ясно, конечно, из того, что при $A<0$ парабола либо пересекает ось абсцисс, либо вся расположена ниже этой оси). Возьмем, например, $x = x_0 = m + \sqrt{m^2 + m}$, где m выбрано так, чтобы оно было больше, чем $\frac{|B|}{|A|}$ и чем $\frac{|C|}{|A|}$. Тогда (напомним, что сейчас у нас $A<0$):

$$Ax_0^2 + 2Bx_0 + C \leqslant -|A|x_0^2 + 2|B|x_0 + |C| < |A|(-x_0^2 + 2mx_0 + m) = |A|(-2m^2 - m - 2m\sqrt{m^2+m} + 2m^2 + 2m\sqrt{m^2+m} + m) = 0,$$

то есть

$$Ax_0^2 + 2Bx_0 + C < 0.$$

Если же $A > 0$, то, выделив из квадратного трехчлена полный квадрат, получим

$$Ax^2 + 2Bx + C = A\left[\left(x + \frac{B}{A}\right)^2 + \frac{C}{A} - \frac{B^2}{A^2}\right] = A\left(x + \frac{B}{A}\right)^2 + \frac{AC - B^2}{A} \geqslant \frac{AC - B^2}{A}, \qquad (2)$$

так как $A\left(x + \frac{B}{A}\right)^2 \geqslant 0$. Знак равенства в неравенстве (2) достигается только при $x = -\frac{B}{A}$. Таким образом, *неравенство* (1) *верно для всех действительных значений x тогда и только тогда, когда $A > 0$ и $AC \geqslant B^2$.*

Знак равенства в неравенстве (1) *достигается лишь в том случае, когда*

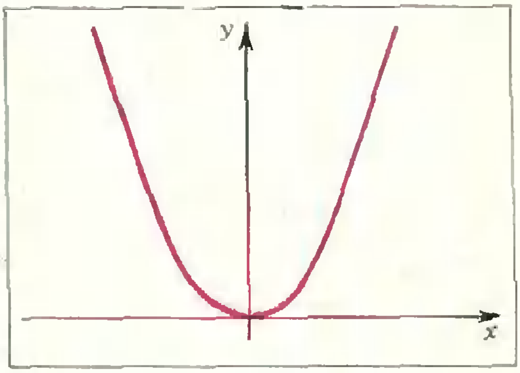


Рис. 1.

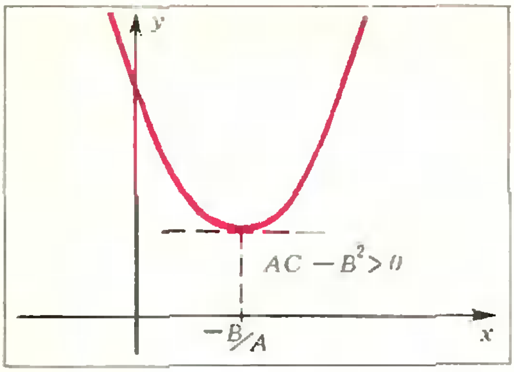


Рис. 2.

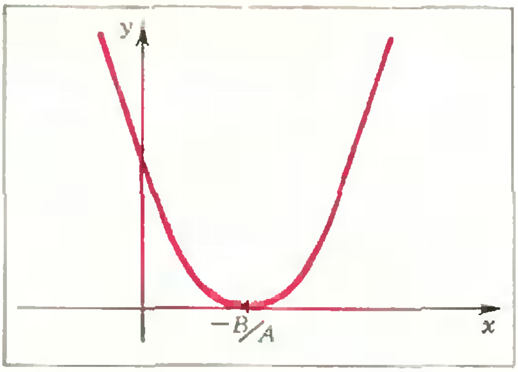


Рис. 3.

$AC = B^2$, *и именно при* $x = -\dfrac{B}{A}$ (рис. 2 и 3).

2. Возьмем произвольные действительные числа

$$a_1, a_2, \ldots, a_N; \quad b_1, b_2, \ldots, b_N; \quad N \geqslant 1,$$

и некоторое x, и напишем такое очевидное неравенство:

$$(a_1x+b_1)^2+(a_2x+b_2)^2+\ldots+(a_Nx+b_N)^2 \geqslant 0. \qquad (3)$$

Его можно переписать в виде

$$Ax^2+2Bx+C \geqslant 0,$$

где

$$A = a_1^2+a_2^2+\ldots+a_N^2,$$
$$B = a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_Nb_N,$$
$$C = b_1^2+b_2^2+\ldots+b_N^2.$$

Предположим, что не все a_n ($n = 1, 2, \ldots, N$) равны нулю. Тогда мы можем утверждать, что $A>0$. Поскольку мы знаем, что неравенство (3) обязано выполняться для всех действительных значений x, то в силу условия $AC \geqslant B^2$ должно быть

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_N^2)\times(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_N^2) \geqslant (a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_Nb_N)^2. \qquad (4)$$

Очевидно, что это неравенство справедливо, причем со знаком равенства, и тогда, когда $a_1 = a_2 = \ldots = a_N = 0$, так что требование отличия от нуля хотя бы одного a_n мы можем отбросить.

Неравенство (4) называется *неравенством Коши* (Огюстен Луи Коши (1789—1857) — известный французский математик); его удобнее записать в форме

$$(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_Nb_N)^2 \leqslant (a_1^2+a_2^2+\ldots+a_N^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_N^2). \quad \text{(К)}$$

Из происхождения неравенства Коши ясно, что знак равенства в нем имеет место тогда и только тогда, когда одновременно

$$a_1x+b_1=0,\ a_2x+b_2=0,\ \ldots,\ a_Nx+b_N=0.$$

Отсюда вытекает, что

1) если какое-либо a_n равно нулю, то и соответствующее $b_n = 0$;

2) для всех $a_n \neq 0$ отношение $\dfrac{b_n}{a_n} = -x$, то есть одно и то же.

Мы будем говорить, что *последовательности* $a_1, a_2, \ldots, a_N$ *и* $b_1, b_2, \ldots, b_N$ *пропорциональны*, если выполнены эти два условия (пример: последовательности 1, 2, 0, —3, 4, и —2, —4, 0, 6, —8 пропорциональны). Таким образом, *знак равенства в неравенстве Коши* (К) *имеет место тогда и только тогда, когда последовательности* $a_1, a_2, \ldots, a_N$ *и* $b_1, b_2, \ldots, b_N$ *пропорциональны.*

Примечание. Если записать неравенство Коши для $N=2$:

$$(a_1b_1+a_2b_2)^2 \leqslant (a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2). \qquad (5)$$

и рассматривать a_1, a_2 и b_1, b_2 как координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на плоскости, так что (рис. 4)

$$\begin{cases} a_1 = |\vec{a}|\cos\alpha, \\ a_2 = |\vec{a}|\sin\alpha, \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = |\vec{b}|\cos\beta, \\ b_2 = |\vec{b}|\sin\beta, \end{cases}$$

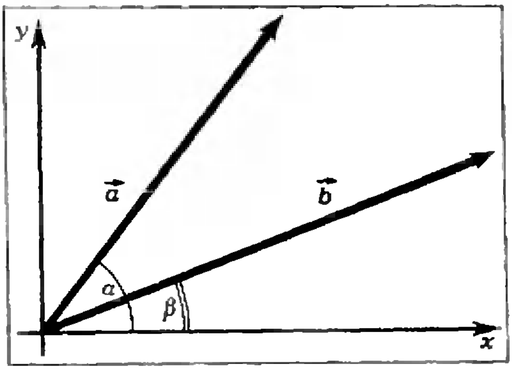


Рис. 4.

то простейшее неравенство Коши (5) представится в виде

$$|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2(\cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta)^2 \leqslant \leqslant |\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2,$$

то есть $\cos^2\varphi \leqslant 1$, где $\varphi = |\alpha - \beta|$ — угол между векторами $\vec{a} = (a_1, a_2)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2)$.

В случае произвольного $N > 2$ неравенство (К) также может быть записано в виде $\cos^2\varphi \leqslant 1$, если соответствующим образом понимать угол φ между двумя векторами $(a_1, a_2, \ldots, a_N)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_N)$ в *N-мерном* пространстве.

3. Неравенство Коши имеет многочисленные приложения. Мы воспользуемся им для вывода других, несколько более сложных неравенств.

Рассмотрим две последовательности: последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_N$ и последовательность $c_1, c_2, \ldots, c_N$ с отличными от нуля членами.

По неравенству (К) имеем

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_N)^2 = \left(a_1c_1\cdot\frac{1}{c_1} + a_2c_2\cdot\frac{1}{c_2} + \ldots + a_Nc_N\cdot\frac{1}{c_N}\right)^2 \leqslant (a_1^2c_1^2 + a_2^2c_2^2 + \ldots + a_N^2c_N^2)\left(\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2} + \ldots + \frac{1}{c_N^2}\right). \quad (6)$$

Положим

$$\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2} + \ldots + \frac{1}{c_N^2} = C_N,$$

и запишем неравенство (6) в виде

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_N)^2 \leqslant C_N(a_1^2c_1^2 + a_2^2c_2^2 + \ldots + a_N^2c_N^2). \quad (7)$$

Знак равенства в (7) имеет место тогда и только тогда, когда последовательности $a_1c_1, a_2c_2, \ldots, a_Nc_N$ и $\frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_2}, \ldots, \frac{1}{c_N}$ пропорциональны (легко убедиться в том, что это равносильно пропорциональности последовательностей $a_1, a_2, \ldots, a_N$ и $\frac{1}{c_1^2}, \frac{1}{c_2^2}, \ldots, \frac{1}{c_N^2}$).

Коэффициент C_N в неравенстве (7) назовем *константой неравенства* *).

Наиболее интересными неравенствами типа (7) являются такие неравенства, константы которых меньше некоторого числа C при любом N: $C_N < C$. Это будет так, если *существует предел*

$$\lim_{N\to\infty} C_N = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2} + \ldots + \frac{1}{c_N^2}\right) = C,$$

то есть, если *бесконечный ряд*

$$\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2} + \ldots + \frac{1}{c_N^2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c_n^2}$$

сходится к сумме C **).

Пример. Положим $c_n = n$, $n = 1, 2, \ldots, N$.

Тогда неравенство (7) примет вид

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_N)^2 \leqslant C_N(a_1^2 + 2^2a_2^2 + 3^2a_3^2 + \ldots + N^2a_N^2) \quad (8)$$

с константой

$$C_N = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{N^2}.$$

---

*) Константой потому, что C_N — одно и то же для всех последовательностей $a_1, a_2, \ldots, a_N$.

**) О пределах см. статью М. Гервера «20 задач на пределы», «Квант», 1974, № 3; о бесконечных рядах — статью того же автора «От перемены мест слагаемых ...», «Квант», 1974 № 9.

Знак равенства в неравенстве (8) имеет место тогда и только тогда, когда $a_n = \frac{\lambda}{n^2}$, $n = 1, 2, \ldots, N$, при произвольном λ.

Известно, что бесконечный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, и что сумма его равна $\frac{\pi^2}{6}$ (это является довольно глубоким фактом, простейшее, вполне элементарное доказательство, которого все же довольно сложно). Это означает, что $\lim\limits_{N\to\infty} C_N = \frac{\pi^2}{6}$, то есть, что $C = \frac{\pi^2}{6}$. Значит, мы можем написать теперь неравенство, справедливое уже для всех $N \geqslant 1$:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_N)^2 < \\ < \frac{\pi^2}{6}\left(a_1^2 + 2^2a_2^2 + \ldots + N^2a_N^2\right). \quad (9)$$

Говорят, что в этом неравенстве константа $\frac{\pi^2}{6}$ — *точная*; это значит, что при достаточно большом значении N отношение его левой и правой частей может, при соответствующем выборе a_n, иметь значение, сколь угодно близкое к единице.

В рассмотренном только что примере мы, подобрав соответствующим образом члены c_n, вывели из неравенства (7) неравенство (9), константа которого — точная. Однако для нахождения этой константы нам пришлось прибегнуть к суммированию бесконечных рядов. Сейчас же мы элементарно выведем одно новое неравенство, принадлежащее Ф. Карлсону (1934 г.). Оно получается также из неравенства (7), в котором мы на этот раз положим $c_n^2 = t + \frac{n^2}{t}$, $n = 1, 2 \ldots, N$, где t — произвольное положительное число.

Тогда

$$a_1^2c_1^2 + a_2^2c_2^2 + \ldots + a_N^2c_N^2 = tP + \frac{1}{t}Q,$$

где

$$P = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_N^2,$$
$$Q = a_1^2 + 2^2a_2^2 + \ldots + N^2a_N^2.$$

В силу неравенства (7) имеем

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_N)^2 \leqslant C_N\left(tP + \frac{1}{t}Q\right),$$

где константа C_N имеет вид

$$C_N = \frac{1}{t + \frac{1}{t}} + \frac{1}{t + \frac{2^2}{t}} + \ldots \\ \ldots + \frac{1}{t + \frac{N^2}{t}} = \\ = \frac{t}{t^2 + 1} + \frac{t}{t^2 + 2^2} + \ldots + \frac{t}{t^2 + N^2}.$$

Оказывается, что эту сложную константу, зависящую от произвольной переменной t и натурального индекса N, можно элементарным способом оценить сверху.

Рассмотрим прямоугольный треугольник OM_0M_N (рис. 5) с катетом OM_0 длины t и катетом M_0M_N длины N. Точки $M_1, M_2, \ldots, M_{N-1}$ на катете M_0M_N расположены так, что они делят его на N отрезков длины единица. Тогда площадь каждого треугольника $OM_{n-1}M_n$, с одной стороны, равна $\frac{1}{2}t$, а с другой —

$$\frac{1}{2}\,|OM_{n-1}|\cdot|OM_n|\cdot\sin\alpha_n = \\ = \frac{1}{2}\sqrt{t^2 + (n-1)^2}\,\sqrt{t^2 + n^2}\cdot\sin\alpha_n,$$

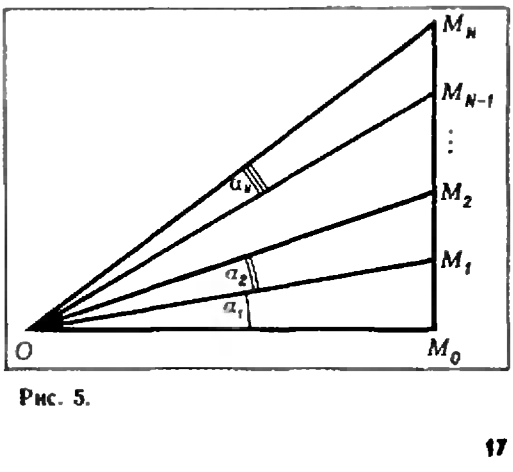


Рис. 5.

где α_n — величина угла между отрезками OM_{n-1} и OM_n, $n = 1, 2, \ldots, N$. Таким образом, мы можем записать равенство

$$t = \sqrt{t^2+(n-1)^2}\cdot\sqrt{t^2+n^2}\sin\alpha_n,$$

из которого

$$\sin\alpha_n = \frac{t}{\sqrt{t^2+(n-1)^2}\,\sqrt{t^2+n^2}} > \frac{t}{t^2+n^2},$$

то есть

$$\frac{t}{t^2+n^2} < \sin\alpha_n < \alpha_n,\quad n = 1, 2, \ldots, N.$$

Поэтому

$$C_N = \frac{t}{t^2+1} + \frac{t}{t^2+2^2} + \ldots + \frac{t}{t^2+N^2} < \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_N < \frac{\pi}{2},$$

и мы получаем неравенство

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_N)^2 < \frac{\pi}{2}\left(tP + \frac{1}{t}Q\right),$$

справедливое при любом положительном значении t.

Положим $t = \sqrt{\frac{Q}{P}}$, при таком выборе $tP + \frac{1}{t}Q = 2\sqrt{PQ}$, и мы получим *неравенство Карлсона*, которое обычно записывают в форме

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_N)^4 < \pi^2 (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_N^2)(a_1^2 + 2^2a_2^2 + \ldots + N^2a_N^2).\ *)$$

Неравенство это справедливо при любом $N \geq 1$, оно может быть распространено и на бесконечные ряды. В этом неравенстве константа π^2 — точная, однако простого доказательства этого факта мы привести не можем.

Точность полученной константы π^2 в неравенстве Карлсона означает, что приведенная выше элементарная оценка C_N через углы α_n — не слишком грубая.

Неравенство Карлсона имеет многочисленные обобщения. Приведем без доказательства только два из них (знак Σ означает суммирование по n от 1 до N или же бесконечный ряд, то есть суммирование по n от 1 до ∞):

$$(\Sigma a_n)^6 < 54\,(\Sigma a_n^2)(\Sigma n a_n^2)(\Sigma n^2 a_n^2),$$

$$(\Sigma a_n)^{15} < 300\,000\,(\Sigma a_n^3)\times(\Sigma n a_n^3)(\Sigma n^2 a_n^3)(\Sigma n^3 a_n^3)(\Sigma n^4 a_n^3).$$

В этих неравенствах константы 54 и, соответственно, 300 000 — точные.

Упражнения

1. Пусть

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = 1,$$
$$b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 = 1.$$

В каких пределах заключено значение выражения

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n?$$

2. Доказать, что для любых положительных $a_1, a_2, \ldots, a_n$ справедливо неравенство

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\times\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

3. Доказать, что

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k)^2 \leq k\,(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2).$$

Когда соблюдается равенство?

4. Доказать, что для неотрицательных $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k$

$$\sqrt{a_1b_1} + \sqrt{a_2b_2} + \ldots + \sqrt{a_kb_k} \leq \sqrt{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}\times\sqrt{b_1 + b_2 + \ldots + b_k}.$$

5. *Неравенство Гельдера.*

Пусть $p > 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (p и q — рациональные положительные числа). Доказать, что

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_kb_k \leq \left(a_1^p + a_2^p + \ldots + a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\times\left(b_1^q + b_2^q + \ldots + b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

*) Изложенный здесь вывод неравенства Карлсона (кроме элементарной оценки C_N) принадлежит известному английскому математику Годфри Гарольду Харди (1877—1947).

Кроссворд

По вертикали: 1. Клоун в маске слона. 2. Научная организация труда кустаря-алхимика. 3. Узкий специалист-арифметик. 4. Единица неразборчивости почерка. 5. Змея из бассейна Амазонки. 6. Не тот человек. 7. Вершина эмансипации. 8. Единица поражающего действия фильма «Ну, погоди!». 9. Вымерший обитатель русских лесов. 10. Революционер, выпускник Горного института. 11. Неустойчивая окружность. 12. Половина морзянки. 13. Титан-небоскреб. 14. Индикатор холода. 15. Любовь. 16. Предмет украшения электриков. 17. Кёрызун. 18. Искусно модулированные акустические автоколебания.

По горизонтали: 1. Альма-матер бенгальских огней. 2. Отец студентам. 3. Певец ломовых извозчиков. 4. Действие граждан после звонка «01». 5. Продукция Трифона. 6. Армейская болельщица. 7. Женщина-предатель. 8. Пржевальский. 9. Неустойчивый треугольник. 10. Маленький вывод. 11. Курица-мать. 12. Сын барана. 13. Девушка с Запада. 14. Праздничное мероприятие у работников охраны. 15. Новая «элементарная» частица. 16. Малый фокусник в трубе. 17. Первая модель зажигалки. 18. Летняя шуба дуба. 19. Книжный магазин на Байкало-Амурской железной дороге.

Из газеты МФТИ «За науку»

В. Майер

Поучительный опыт с кумулятивной струей

Мы уже рассказывали о том, как можно наблюдать образование тонкой сильной струи, вызванной концентрацией энергии в определенном направлении (см. статью Г. Покровского «Гидродинамический механизм в падающей пробирке», «Квант», 1974, № 3). Такой эффект называют кумулятивным (от латинского cumulo — собираю), а образовавшуюся струю — кумулятивной.
Теперь мы публикуем статью В. Майера, в которой рассказывается еще об одном опыте с кумулятивной струей, а также предлагается несколько экспериментальных задач, связанных с образованием струи в падающей пробирке.

В простом и изящном опыте профессора Г. И. Покровского струя образуется при ударе о твердую поверхность стола вертикально падающей пробирки (с высоты нескольких сантиметров), частично заполненной водой. Поскольку вода смачивает стекло, поверхность воды в пробирке образует вогнутый мениск. При ударе о стол пробирка и находящаяся в ней вода резко тормозятся, возникают очень большие ускорения, жидкость становится как бы очень тяжелой и ее поверхность выравнивается. Края опускаются вниз, а из центральной части небольшое количество воды выбрасывается в воздух в виде узкого кратковременного фонтанчика.

Мы предлагаем вам поставить аналогичный эксперимент, быть может, еще более поразительный, чем опыт с ударяющейся пробиркой.

Аккуратно отрежьте дно пробирки, так чтобы получилась стеклянная трубка диаметром 15 *мм* и длиной около 100 *мм*. Верхний конец трубки (с отогнутыми краями) затяните тонкой резиновой пленкой от детского надувного шарика. Налейте в трубку воды и, зажав ее открытый конец пальцем, опустите трубку этим концом вниз в стакан с водой. Убрав палец, поднимите трубку до поверхности воды в стакане так, чтобы в нее вошел воздух и в трубке остался слой

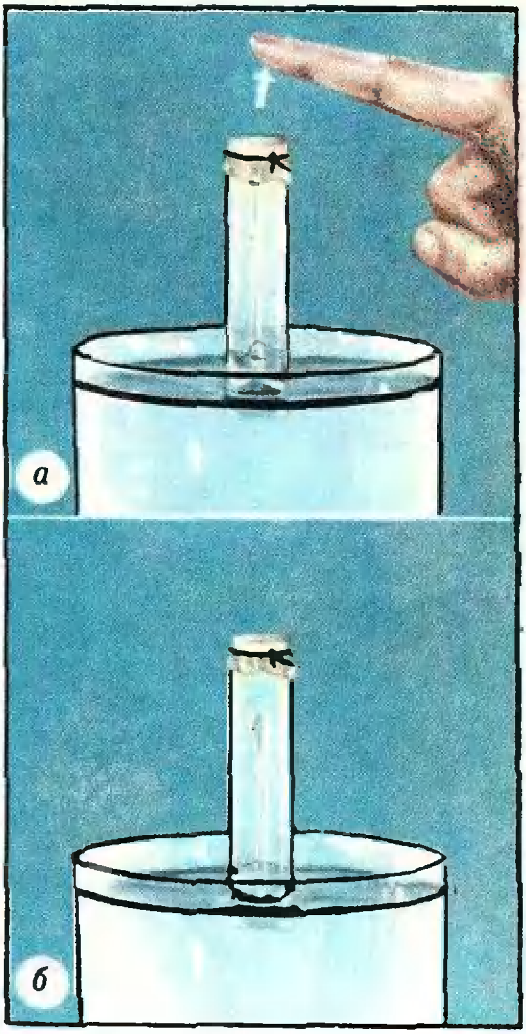


Рис. 1.

воды толщиной примерно 1 *см*. Поверхность воды в трубке должна находиться на одном уровне с поверхностью воды в стакане.

Расположите трубку вертикально и закрепите ее в штативе. Теперь слегка ударьте пальцем по резиновой пленке: немедленно внутри трубки возникнет кумулятивная струя, поднимающаяся до самой пленки!

На рисунках 1 и 2 приведены фотографии опыта, полученные в разные моменты времени для разных ударов, поэтому на них зафиксированы различные фазы образования и разрушения разных кумулятивных струй; на первых двух фотографиях вы видите собственно струю, на остальных — распадение струи на отдельные капли.

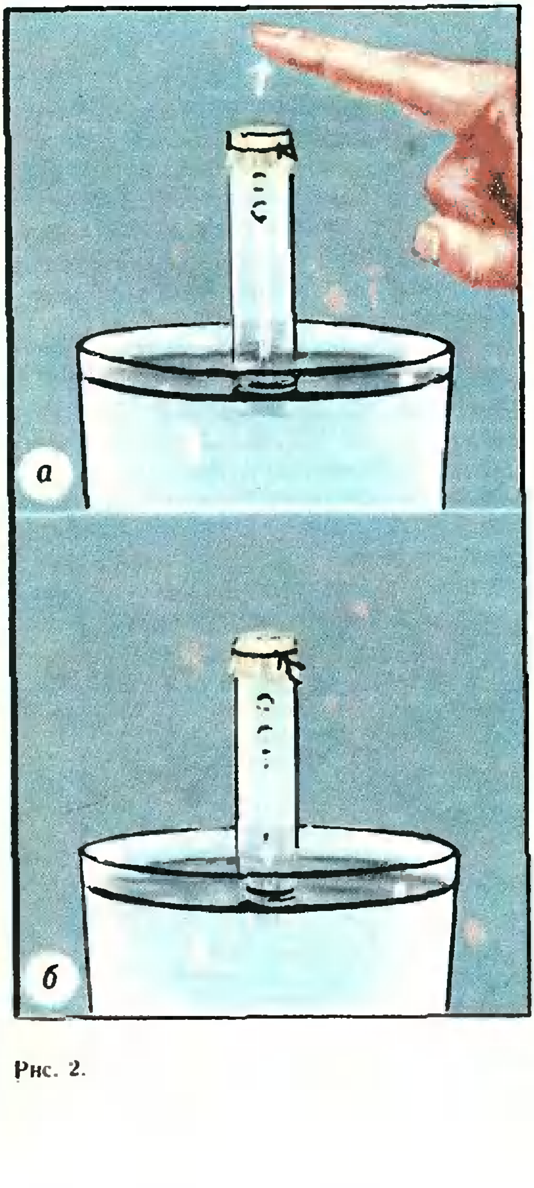


Рис. 2.

Сопоставив этот опыт с экспериментом, описанным Г. И. Покровским, попробуйте объяснить его результат.

Предлагаемый опыт особенно интересен тем, что в нем можно наблюдать сам процесс образования кумулятивной струи. В опыте с падающей пробиркой сделать это гораздо сложнее: глаз не успевает фиксировать явления, происходящие в момент образования струи при ударе пробирки о стол. Тем не менее, мы советуем вам еще раз вернуться к опыту с падающей пробиркой и подробнее исследовать причины образования струи. С этой целью предлагаем вам несколько экспериментальных задач.

1. Выясните, влияет ли форма дна пробирки на образование струи. Может быть, струя возникает за счет фокусировки вогнутым дном появляющейся в воде ударной волны?

Припаяйте к тонкостенной медной трубке жестяное дно любой интересующей вас формы (например, плоское или вогнутое). Опыты, проделанные с получившимися пробирками, покажут, что форма дна на образование струи не влияет. Таким образом, фокусировкой ударной волны объяснить результат опыта нельзя.

2. Обязательно ли жидкость должна смачивать стенки пробирки?

Поместите внутрь стеклянной пробирки небольшой кусочек парафина и расплавьте его на пламени сухого горючего. Вращая удаленную из пламени пробирку, покройте ее изнутри тонким слоем парафина и проведите опыт Г. И. Покровского. В этом случае кумулятивная струя не образуется. Следовательно, смачиваемость стенок пробирки жидкостью является существенным условием опыта.

3. Какие еще опыты можно провести, чтобы получить кумулятивную струю в неподвижной относительно наблюдателя пробирке?

Н. Васильев

Сложение фигур

По-видимому, каждый из читателей поймет, что от него требуется, если его попросят сложить из трех одинаковых треугольников трапецию или из четырех уголков — уголок вдвое большего размера. Но в нашей заметке пойдет речь о «сложении» совсем другого рода. Суммой двух треугольников у нас будет, как правило, выпуклый шестиугольник, суммой двух одинаковых кругов — круг вдвое большего радиуса, а суммой двух отрезков — параллелограмм. Чтобы отличить операцию, о которой мы будем рассказывать, от обычного «объединения», ее называют «векторной суммой» или «суммой Минковского» — по имени изучившего ее замечательного немецкого математика Германа Минковского (1864—1909). Наиболее интересные применения этого понятия относятся к выпуклым телам в трехмерном и вообще n-мерном пространстве. Но мы будем иметь дело главным образом с плоскими фигурами.

Поводом для этой заметки послужила задача М330 из «задачника «Кванта», которую мы здесь решим. Вот ее формулировка.

На плоскости расположены два выпуклых многоугольника F *и* G. *Обозначим через* H *множество точек, в которые может попасть середина отрезка, один конец которого принадлежит* F, *второй —* G. *Докажите, что* H *— выпуклый многоугольник.*

а) Сколько сторон может иметь H, *если* F *имеет их n_1, а* G *— n_2?*

б) Каков может быть периметр H, *если периметр* F *равен P_1, а* G *— P_2?*

в) Какова может быть площадь* H, *если площадь* F *равна S_1, а площадь* G *— S_2?*

§ 1. Множество середин

Начнем с разбора более простой задачи.

Задача 1. Даны два отрезка: $[AB]$ и $[CD]$. Найти множество точек, в которые может попасть середина отрезка, один конец которого P лежит на $[AB]$, а другой конец Q — на $[CD]$.

Решение. Рассмотрим сначала общий случай, когда отрезки $[AB]$ и $[CD]$ не параллельны. (Частный случай $[AB] \parallel [CD]$ мы обсудим ниже.) Обозначим середину отрезка $[PQ]$ через M. Зафиксируем сначала положение точки Q. Если P пробегает весь отрезок $[AB]$, то при этом M пробегает среднюю линию треугольника QAB (рис. 1а)— отрезок с концами в серединах отрезков $[QA]$ и

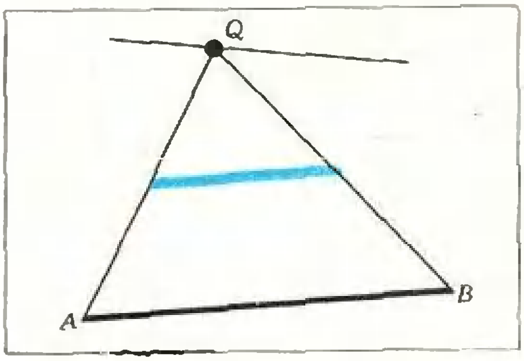


Рис. 1а.

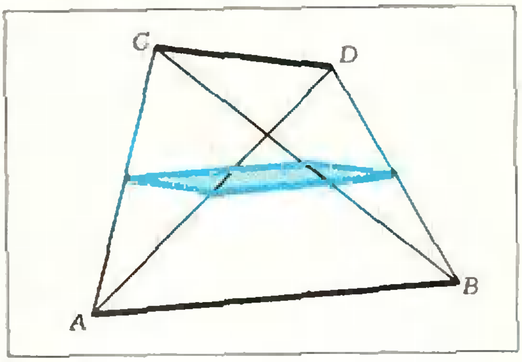


Рис. 1б.

$[QB]$. Если теперь заставить точку Q пройти весь отрезок $[CD]$, то средняя линия треугольника QAB, очевидно, заметет целый *параллелограмм* (рис. 1б)— вершинами его будут середины отрезков $[AC]$, $[AD]$, $[BC]$ и $[BD]$.

Заметим, что если $[AB]$ и $[CD]$ пересекаются, то искомое множество — параллелограмм с вершинами в серединах сторон выпуклого четырехугольника $ACBD$, а если $[AB]$ и $[CD]$ не лежат в одной плоскости, то наш параллелограмм получится в сечении тетраэдра $ABCD$ плоскостью, параллельной $[AB]$ и $[CD]$ и проходящей посередине между ними.

Выясним, во что превратится этот параллелограмм, когда отрезки $[AB]$ и $[CD]$ параллельны. (Можно считать, что они и одинаково направлены.) Если $[AB]$ и $[CD]$ принадлежат различным параллельным прямым, то $ABDC$ — трапеция, а середины M отрезков PQ заполняют среднюю линию этой трапеции (рис. 1в)— *отрезок с концами в серединах отрезков* $[AC]$ *и* $[BD]$.

Такой же ответ получается и в том случае, когда $[AB]$ и $[CD]$ принадлежат одной прямой. Здесь, чтобы не разбирать различных расположений точек A, B, C, D на прямой, удобно перевести задачу на язык алгебры. Будем считать, что наша прямая — числовая ось, координаты данных точек — k_A, k_B, k_C, k_D ($k_A<k_B$, $k_C<k_D$), и воспользуемся таким фактом: множество чисел $(x_P+x_Q)/2$, где $x_P \in [k_A, k_B]$, $x_Q \in [k_C, k_D]$ — отрезок $[(k_A+k_B)/2, (k_C+k_D)/2]$ (рис. 1 г). Заметим, что длина полученного отрезка равна $(|AB|+|CD|)/2$.

Задача 1 полностью решена. В дальнейшем мы не будем столь пунктуальны в изложении решений и доказательств — многие детали оставлены читателям.

Условимся, что граничные точки всех рассматриваемых фигур (многоугольников, кругов, полуплоскостей) принадлежат этим фигурам. Следующее определение позволит нам избежать повторения слов: «отрезок», «середина», «конец».

О п р е д е л е н и е 1. Пусть заданы две фигуры F и G (два множества точек на плоскости или в пространстве). Назовем *полусуммой* этих фигур множество всех середин отрезков, один конец которых принадлежит F, а другой — G. Обозначим это множество так: F∗G.

П р и м е р 1. а) Если и F, и G состоят из одной точки: F = $\{P\}$, G = $\{Q\}$, то F∗G — тоже одна точка (середина отрезка $[PQ]$). Будем обозначать ее $P*Q$.

б) Если F — отрезок, G — одна точка (F = $[AB]$, G = $\{Q\}$, рис. 1а), то F∗G — отрезок длины $|AB|/2$.

в) Если F и G — параллельные отрезки $[AB]$ и $[CD]$, то F∗G — параллельный им отрезок длины $(|AB|+|CD|)/2$ («средняя линия», рис. 1в, 1 г).

г) Если F и G — непараллельные отрезки: F = $[AB]$, G = $[CD]$, то F∗G — параллелограмм с вершинами $A*C$, $A*D$, $B*D$, $B*C$ (рис. 1б).

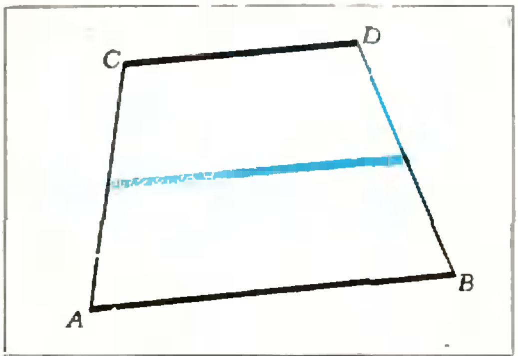


Рис. 1в.

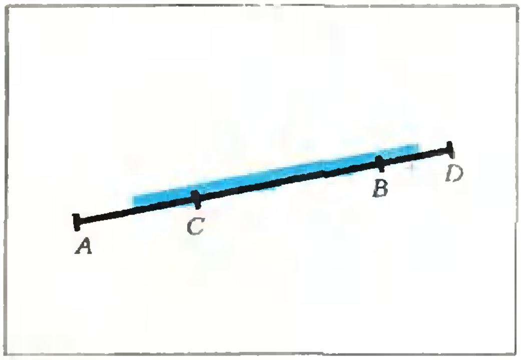


Рис. 1г.

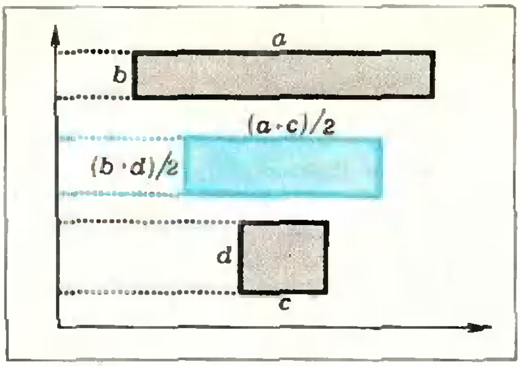


Рис. 2.

Пример 2. Полусумма двух прямоугольников F и G размерами $a\times b$ и $c\times d$, у которых стороны a и c параллельны,— прямоугольник размерами $(a+c)/2\times(b+d)/2$ (рис. 2).

Действительно, в системе координат Oxy, у которой ось Ox параллельна сторонам a и c, координаты x точек прямоугольников F и G пробегают отрезки длиной a и c, координаты y — отрезки длиной b и d, а полусуммы этих координат — отрезки соответственно длиной $(a+c)/2$ и $(b+d)/2$. (Здесь вновь пригодился тот «очевидный факт», который мы использовали в конце решения задачи 1.)

Задача 2. Найдите полусумму следующих двух фигур:

а) двух непараллельно расположенных прямоугольников;

б) правильного треугольника и его стороны;

в) двух треугольников, на которые квадрат разрезается диагональю;

г) квадрата и правильного треугольника, имеющих одну общую сторону;

д) отрезка и круга;

е) двух окружностей разного радиуса;

ж) полуокружности с самой собой;

з) полуокружностей, составляющих вместе окружность;

и) одна фигура — две соседние стороны правильного пятиугольника, другая — три остальные его стороны.

Решение задачи 2а). Будем действовать так же, как при решении задачи 1. Зафиксируем точку P прямоугольника F (рис. 3). Тогда множество точек $P*Q$, где Q пробегает G, — прямоугольник $\{P\}*G$, гомотетичный G с коэффициентом 1/2 (и с центром гомотетии P). Мы должны теперь взять объединение всех прямоугольников $\{P\}*G$, где P пробегает F. Нетрудно видеть, что нужное объединение F∗G (фигура, заметаемая голубым прямоугольником на рис. 3, когда нижняя синяя вершина пробегает розовый прямоугольник, гомотетичный прямоугольнику F с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$) — выпуклый восьмиугольник, стороны которого параллельны сторонам данных прямоугольников, а по длине равны их половинам.

Сопоставляя задачу 2а) с предшествующим ей примером 2, мы видим, что форма фигуры F∗G может существенно измениться при повороте одной из фигур F или G.

Восемь ответов к пунктам б) — и) задачи 2 в беспорядке приведены на рисунке 4.

Задача 3. Найдите полусумму следующих фигур в пространстве:

а) двух параллельно расположенных прямоугольных параллелепипедов;

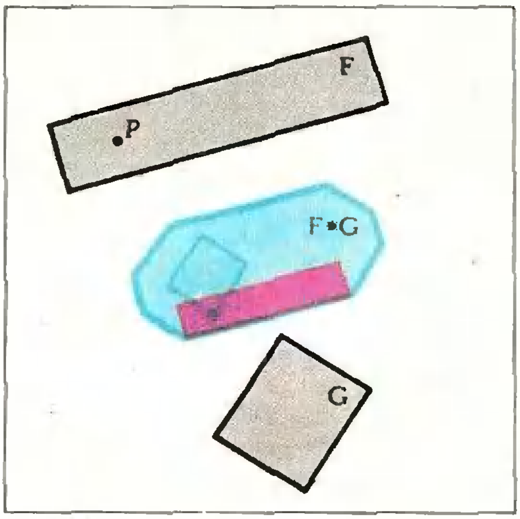


Рис. 3.

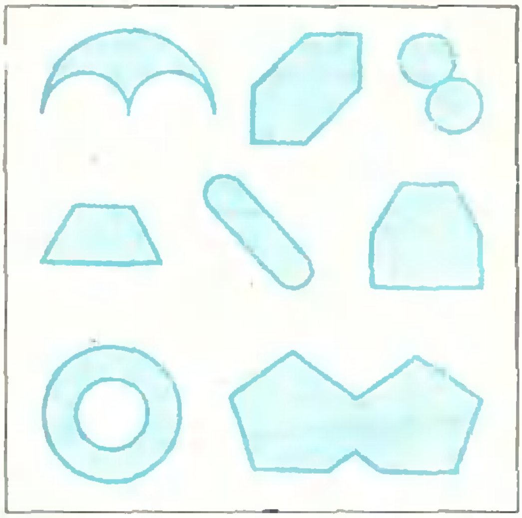


Рис. 4.

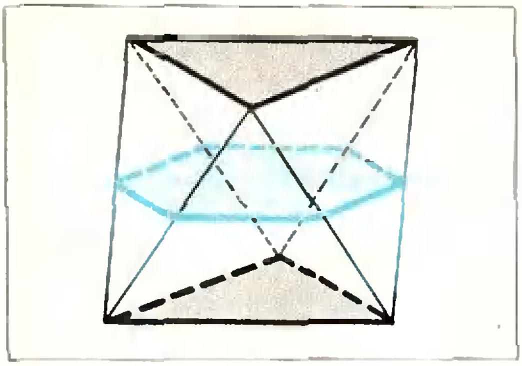


Рис. 5.

б) отрезка и многоугольника, не лежащих в параллельных плоскостях;
в) окружности и шара;
г) двух противоположных граней правильного октаэдра (рис. 5);
д) двух половинок шара, разрезанного диаметральной плоскостью.

§ 2. Полусумма выпуклых многоугольников

Напомним, что множество точек F называется *выпуклым*, если для любых двух точек P и Q из F весь отрезок $[PQ]$ содержится в F.

Возможно, вы заметили, что находить полусумму выпуклых фигур проще, чем не выпуклых, причем *если* F *и* G — *выпуклые фигуры, то* F∗G — *тоже выпукло.*

Докажем это. Пусть M_1 и M_2 — произвольные точки из F∗G. Тогда $M_1 = P_1 * Q_1$, $M_2 = P_2 * Q_2$ при некоторых $P_1 \in$ F, $P_2 \in$ F, $Q_1 \in$ G, $Q_2 \in$ G*). Поскольку F и G выпуклы, то $[P_1P_2] \subset$ F и $[Q_1 Q_2] \subset$ G. Тогда $([P_1P_2] * [Q_1 Q_2]) \subset$ F ∗ G. Но, как мы знаем (пример 1), полусумма отрезков — параллелограмм, причем точки M_1 и M_2 — его вершины (параллелограмм может выродиться в отрезок, содержащий точки M_1 и M_2). Раз фигура F ∗ G содержит этот параллелограмм, она содержит и отрезок $[M_1 M_2]$: F ∗ G $\supset ([P_1P_2] * [Q_1 Q_2]) \supset [M_1 M_2]$.

Из примеров, встретившихся в задачах 2 а) — и), видно, что полусумма выпуклых многоугольников F и G — многоугольник, стороны которого параллельны сторонам F и G, но вдвое короче. Доказать этот факт (и даже точно его сформулировать) проще всего, представив выпуклый многоугольник как пересечение полуплоскостей.

Будем говорить, что две полуплоскости σ_1 и σ_2 имеют *одинаковое направление*, если $\sigma_1 \supset \sigma_2$ или $\sigma_2 \supset \sigma_1$. Разумеется, края таких полуплоскостей l_1 и l_2 — параллельные прямые, а их полусумма $\sigma_1 * \sigma_2$ — полуплоскость того же направления, края которой — прямая $l_1 * l_2$, расположенная посередине между l_1 и l_2. (Докажите это аккуратно!)

Назовем полуплоскость σ_F *опорной* для многоугольника F, если $\sigma_F \supset$ F и пересечение F с граничной прямой l_F полуплоскости σ_F непусто. Это пересечение $l_F \cap$ F назовем *опорным* множеством. Ясно, что для каждого *направления* σ есть своя опорная полуплоскость. Соответствующее ей опорное множество — либо одна точка (вершина многоугольника), либо отрезок (сторона многоугольника). Опорное множество мы обозначим F_σ.

Пусть F и G — два выпуклых многоугольника, σ_F и σ_G — их опорные полуплоскости одного и того же направления, F_σ и G_σ — соответствующие опорные множества. Легко найти опорное множество того же направления для полусуммы F ∗ G: *оно равно полусумме опорных множеств* F_σ *и* G_σ, *то есть*

$$(F * G)_\sigma = F_\sigma * G_\sigma.$$

Действительно (рис. 6), середина M любого отрезка PQ, где $P \in$ F, $Q \in$ G, лежит в полуплоскости $\sigma_F * \sigma_G = \sigma_{F*G}$, причем на граничную прямую полуплоскости σ_{F*G} точка M может попасть в том и только в том случае, если одновременно $P \in F_\sigma$ и $Q \in G_\sigma$.

*) Мы используем обычные обозначения: F ∩ G — пересечение фигур F и G, F ∪ G — их объединение, G ⊂ F (или F ⊃ G) означает, что G содержится в F, $P \in$ F — что точка P принадлежит F.

Теперь мы можем сформулировать удобное правило, позволяющее найти полусумму $F * G$ выпуклых многоугольников F и G.

Нужно рассмотреть каждое такое направление σ, для которого хотя бы одно из соответствующих опорных множеств F_σ и G_σ является отрезком (стороной F или G), и построить полусумму F_σ и G_σ — отрезок $F_\sigma * G_\sigma$ (пользуясь примерами 1б), в)). Объединение всех этих отрезков $F_\sigma * G_\sigma$ по разным направлениям σ — граница фигуры $F * G$.

Применение этого правила иллюстрирует рисунок 6, где каждому из направлений σ соответствует свой цвет. Ясно, что опорные множества F_σ, G_σ, а значит, и $(F * G)_\sigma = F_\sigma * G_\sigma$ для остальных «промежуточных» направлений состоят из отдельных точек (вершин соответствующих многоугольников). Мы уже доказали, что фигура $F * G$ выпукла. Теперь, найдя ее границу, мы видим, что $F * G$ — выпуклый многоугольник, причем направления его сторон — те же, что у F и G.

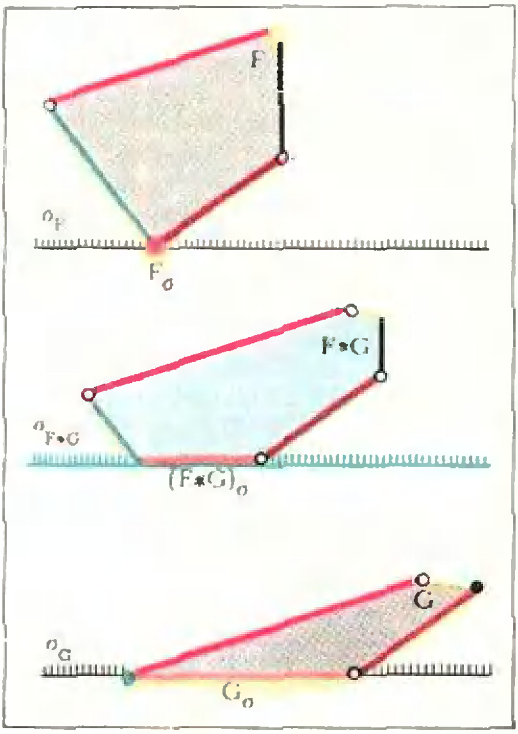


Рис. 6.

Задача 4. а) Докажите, что если σ и τ — полуплоскости разных направлений, то $\sigma * \tau$ — вся плоскость.

б) Попробуйте решить задачи 2а) — г), пользуясь правилом, сформулированным выше.

в) Приведите пример пятиугольника F и треугольника G, для которых $F * G$ имеет 5, 6, 7 и 8 сторон.

Теперь уже легко дать ответы на вопросы а) и б) задачи М330:

а) количество сторон полусуммы n_1-угольника и n_2-угольника может быть любым числом, которое не больше $n_1 + n_2$ и не меньше, чем наибольшее из чисел n_1, n_2;

б) периметр $F * G$ равен полусумме периметров F и G).*

Найти ответ на вопрос в) задачи М330 и обосновать его намного труднее. Мы узнаем его в § 4. А пока расскажем о том, что такое *сумма* и *линейная комбинация* фигур.

§ 3. Суммы и линейные комбинации фигур

Мы очень много раз использовали слово «полусумма» и заменяющий его значок $*$. Пора сказать, что такое *сумма* двух фигур.

Зафиксируем некоторую точку O (*начало отсчета* или *полюс*).

Определение 2. Множество всех концов M векторов

$$\vec{OM} = \vec{OP} + \vec{OQ},$$

где P и Q — произвольные точки фигур F и G соответственно, называется *суммой* (или *суммой Минковского*) фигур F и G (рис. 7). Сумма F и G обозначается $F + G$.

Определение 3. Множество всех концов M векторов

$$\vec{OM} = \lambda \cdot \vec{OP},$$

где P — произвольная точка фигуры F, λ — данное положительное число, называется *произведением* F на λ (рис. 8). Эта фигура обозначается λF.

*) Действительно, если длину точки считать равной 0, то длина $(F*G)_\sigma$ равна полусумме длин F_σ и G_σ для каждого направления σ.

Пример 3. «Полусумма» $F*G$ (определение 1) есть как раз $\frac{1}{2}(F_1+F_2)$: ведь условие $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}\right)$ означает, что M — середина отрезка $[PQ]$.

Фигуру $\lambda F+\mu G$, где λ и μ — положительные числа, мы будем называть *линейной комбинацией* фигур F и G.

Пример 4. Линейная комбинация $\lambda F+\mu G$ прямоугольников $a\times b$ и $c\times d$, у которых стороны a и c параллельны (как в примере 2),— прямоугольник $(\lambda a+\mu c)\times(\lambda b+\mu d)$.

Задача 5. Как выглядят линейные комбинации $\lambda F+\mu G$ тех фигур F и G, полусуммы которых требовалось найти в задачах 2—4?

Задача 6. Докажите следующие свойства введенных операций:

1°) $F_1+F_2=F_2+F_1$;
2°) $(F_1+F_2)+F_3=F_1+(F_2+F_3)$;
3°) $\lambda(\mu F)=(\lambda\mu)F$;
4°) $\lambda(F_1+F_2)=\lambda F_1+\lambda F_2$;
5°) если $F_1\subset F_2$, $G_1\subset G_2$, то $\lambda F_1+\mu G_1\subset\lambda F_2+\mu G_2$;
6°) $\lambda F+\mu F\supset(\lambda+\mu)F$; если F выпукло, то $\lambda F+\mu F=(\lambda+\mu)F$;
7°) $\lambda(F\cup G)=\lambda F\cup\lambda G$ и $H+(F\cup G)=(H+F)\cup(H+G)$;
8°) $\lambda(F\cap G)=\lambda F\cap\lambda G$ и $H+(F\cap G)\subset(H+F)\cap(H+G)$;
9°) если F и G — выпуклые многоугольники на плоскости периметров P_F и P_G, то $\lambda F+\mu G$ — выпуклый многоугольник периметра $\lambda P_F+\mu P_G$;
10°) если $\lambda+\mu=1$, то линейная комбинация $\lambda F+\mu G$ не зависит от того, в какой точке O помещен «полюс».

Вообще говоря, при другом выборе полюса O и при параллельном переносе данных фигур F и G линейная комбинация $\lambda F+\mu G$ меняется, но не существенно — она просто подвергается параллельному переносу. Таким образом, если условиться две фигуры, получающиеся друг из друга параллельными переносами, не различать, считать *эквивалентными*, то можно не указывать, где выбран полюс — результат $\lambda F+\mu G$ будет однозначно определен.

Заметим, что любая линейная комбинация $\lambda F+\mu G$ фигур F и G получается из «*нормированной*» комбинации $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}F+\frac{\mu}{\lambda+\mu}G$ (такой, у которой сумма коэффициентов равна 1) умножением на число $(\lambda+\mu)$, то есть просто гомотетией. Таким образом, линейные комбинации с $\lambda+\mu\neq1$ не дадут новых по форме фигур.

Опишем один способ представить себе все нормированные линейные комбинации двух выпуклых многоугольников F и G. Перенесем один из них (не поворачивая) в параллельную плоскость и построим «выпуклую оболочку» F и G — выпуклый многогранник, все вершины которого совпадают с вершинами F и G (например, правильный октаэдр на рисунке 5 — выпуклая оболочка верхнего и нижнего треугольников; его «среднее сечение» — полусумма этих треугольников). Тогда сечения этого многогранника плоскостями, параллельными F и G, дадут как раз линейные комбинации $\lambda F+\mu G$, где $\lambda+\mu=1$; отношение λ/μ равно отношению расстояний от секущей плоскости до плоскостей F и G.

Следующие пять задач с разных сторон иллюстрируют понятие «суммы Минковского».

Задача 7. Из точки O, лежащей на границе полуплоскости, внутрь полуплоскости направлено n векторов длины 1. Дока-

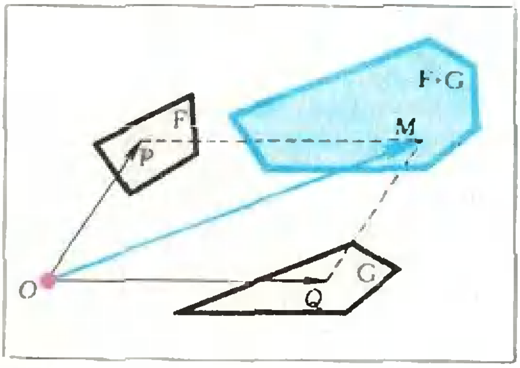


Рис. 7.

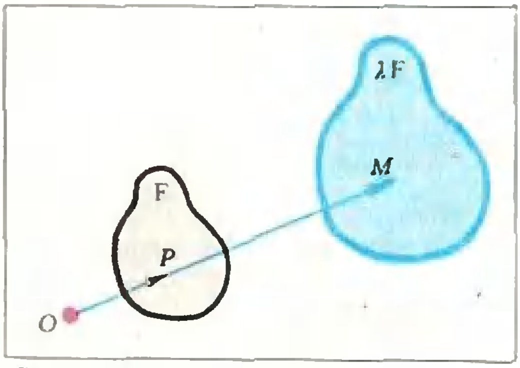


Рис. 8.

жите, что если n нечетно, то длина их суммы не меньше 1.

Задача 8. Пусть F — выпуклый многоугольник, S — его площадь, P — периметр, K — круг радиуса 1 с центром O. Докажите, что площадь фигуры $F+\rho K$ (ρ-окрестности многоугольника F) равна $S+\rho P+\rho^2\pi$. Напишите аналогичную формулу для объема ρ-окрестности выпуклого многогранника.

Задача 9. Докажите, что следующие три свойства выпуклого многоугольника F эквивалентны: (1) F имеет центр симметрии; (2) F можно разрезать на параллелограммы; (3) F есть сумма нескольких отрезков.

Задача 10. Докажите, что следующие два свойства выпуклого многогранника эквивалентны: (1) все грани F — параллелограммы; (2) F есть сумма нескольких отрезков, никакие три из которых не параллельны одной плоскости. Сколько граней имеет такой многогранник, если количество отрезков — k?

Задача 11. От незагашенного окурка в одной точке загорелся лес. Ветер дул в течение времени t_1 со скоростью $\vec{v}_1$, затем t_2 — со скоростью $\vec{v}_2$, ..., t_n — со скоростью $\vec{v}_n$. Пожар распространяется от загоревшихся участков со скоростью ветра (причем эти участки продолжают гореть). Какой участок выгорел за это время? А если пожар, кроме того, распространяется равномерно по всем направлениям со скоростью $\vec{u}$? (А. Савин)

§ 4. Площадь суммы фигур

Площадь фигуры F будем обозначать через S_F. Теорема о площадях гомотетичных фигур гласит:

$$S_{\lambda F}=\lambda^2 S_F. \qquad (1)$$

Посмотрим, что можно сказать о площади суммы и, вообще, линейной комбинации двух фигур. Начнем с частного случая, когда F и G — прямоугольники $a\times b$ и $c\times d$, причем стороны длины a и c параллельны. Тогда $\lambda F+\mu G$ — прямоугольник $(\lambda a+\mu c)\times(\lambda b+\mu d)$ и

$$S_{\lambda F+\mu G}=(\lambda a+\mu c)(\lambda b+\mu d)=$$
$$=\lambda^2 ab+\mu^2 cd+\lambda\mu(ad+bc)\geqslant$$
$$\geqslant\lambda^2 ab+\mu^2 cd+2\lambda\mu\sqrt{abcd}=$$
$$=(\lambda\sqrt{ab}+\mu\sqrt{cd})^2,$$

то есть

$$S_{\lambda F+\mu G}\geqslant(\lambda\sqrt{S_F}+\mu\sqrt{S_G})^2 \qquad (2)$$

(мы воспользовались неравенством $p+q\geqslant 2\sqrt{pq}$). Получить какие-то еще, кроме неравенства (2), ограничения на величину $S_{\lambda F+\mu G}$ при заданных S_F и S_G нельзя. Действительно, положив в (2) $b=a$, $c=ke$, $d=e/k$ (k — какое-то положительное число), мы получим: $S_F=a^2$, $S_G=e^2$,

$$S_{\lambda F+\mu G}=\lambda^2 a^2+$$
$$+\mu^2e^2+\lambda\mu ae\left(k+\frac{1}{k}\right)=$$
$$=(\lambda a+\mu e)^2+\left(k+\frac{1}{k}-2\right)\lambda\mu ae.$$

При фиксированных a, e и λ, μ вторая скобка принимает любое неотрицательное значение (в зависимости от k), поэтому $S_{\lambda F+\mu G}$ может принять любое значение, не меньшее $(\lambda\sqrt{S_F}+\mu\sqrt{S_G})^2$.

Теперь мы можем, наконец, привести ответ на вопрос в) задачи М330: *площадь полусуммы выпуклых многоугольников площадей S_1 и S_2 может принимать любое значение, большее или равное* $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2/4$.

Тот факт, что меньшее значение площадь полусуммы принимать не может, вытекает из следующей замечательной теоремы.

Теорема Брунна — Минковского. *Неравенство* (2) *выполнено для любых двух выпуклых фигур* F, G *и любых положительных чисел* λ, μ.

Доказательство. Прежде всего, используя соображения подобия и формулу (1), легко свести дело к случаю, когда площади данных фигур равны, а линейная комбинация — нормированная. Для этого случая неравенство (2) выглядит очень просто:

$$\textit{если}\quad S_F=S_G=S\quad\textit{и}\quad\lambda+\mu=1,\quad\textit{то}$$
$$S_{\lambda F+\mu G}\geqslant S. \qquad (3)$$

Покажем, как из (3) выводится неравенство (2) для любых F, G, λ и μ. Рассмотрим вместе с F и G гомотетичные им фигуры площади S:

$$F^*=\sqrt{S/S_F}\,F,\qquad G^*=\sqrt{S/S_G}\,G.$$

Тогда

$$\lambda F+\mu G=\lambda\sqrt{S_F/S}\ F^*+\mu\sqrt{S_G/S}\ G^*=\left(\lambda\sqrt{S_F/S}+\mu\sqrt{S_G/S}\right)(\lambda^*F^*+\mu^*G^*),$$

где $\lambda^*+\mu^*=1$. Применяя (3) к $\lambda^*F^*+\mu^*G^*$ и пользуясь еще раз (1), получим (2):

$$\sqrt{S_{\lambda F+\mu G}}\geqslant\left(\lambda\sqrt{S_F/S}+\mu\sqrt{S_G/S}\right)\sqrt{S}=\lambda\sqrt{S_F}+\mu\sqrt{S_G}.$$

Вот основное соображение, используемое при доказательстве неравенства (3). Если фигура F разбита горизонтальной прямой l на две части: верхнюю $F_в$ и нижнюю $F_н$, и аналогично, G другой горизонтальной прямой m разделена на две части $G_в$ и $G_н$, то множества $\lambda F_в+\mu G_в$ и $\lambda F_н+\mu G_н$ не налегают друг на друга: первое лежит выше прямой $\lambda l+\mu m$, второе — ниже.

Теперь доказательство в двух словах можно закончить так.

Разобьем многоугольники F и G на N узких горизонтальных полосок и занумеруем их по порядку сверху вниз: $F_1\cup F_2\cup\ldots\cup F_N=F$, $G_1\cup G_2\cup\ldots\cup G_N=G$. Каждую полоску можно считать прямоугольником площади S/N (если N велико, это «с точностью до сколь угодно малого ε» не влияет на площади фигур F, G и $\lambda F+\mu G$). Но для прямоугольников с параллельными сторонами основное неравенство (2) уже доказано, поэтому площадь каждой из полосок $\lambda F_i+\mu G_i$, $i=1,2,\ldots,N$ (мы складываем лишь полоски с одинаковыми номерами!), не меньше S/N. А поскольку эти N полосок не налегают друг на друга и, разумеется, содержатся в $\lambda F+\mu G$, то площадь $S_{\lambda F+\mu G}$ не меньше S.

Итак, неравенство Брунна — Минковского доказано. Приведем здесь только одно его следствие. Это — знаменитая изопериметрическая теорема: *площадь любой фигуры с периметром P не больше, чем площадь круга с длиной окружности P*. Докажем ее для выпуклого многоугольника F. Используя обозначения и результат задачи 8, применим к сумме F + K (K — круг единичного радиуса) неравенство Брунна. Получим:

$$\sqrt{S+P+\pi}\geqslant\sqrt{S}+\sqrt{\pi},$$

или, после упрощений, $S\leqslant P^2/4\pi$. Это и есть нужное неравенство!

Задача 12. а) Докажите, что для площадей линейной комбинации двух выпуклых многоугольников верна формула $S_{\lambda F+\mu G}=S_F\lambda^2+2S_{F,G}\lambda\mu+S_G\mu^2$, где число $S_{F,G}$ зависит только от F и G (это число называется *смешанной площадью* фигур F и G). Найдите $S_{F,G}$ для фигур F, G из задач 2а) — д).

б) Докажите, что всегда $S^2_{F,G}\geqslant S_FS_G$, причем равенство имеет место, только если многоугольники F и G гомотетичны.

Задача 13. Докажите, что неравенство (2) верно для произвольных фигур (не обязательно выпуклых). Подумайте, как сформулировать и доказать аналогичную теорему для объемов пространственных фигур.

В заключение нашего беглого знакомства с суммой Минковского перечислим некоторые книги и статьи, в которых рассказано о сложении фигур, применении этой операции к теории выпуклых множеств, в частности, о различных доказательствах неравенства Брунна — Минковского, его обобщениях и геометрических следствиях.

И. М. Яглом, В. Г. Болтянский. «Выпуклые фигуры» (книга из серии «Библиотека математического кружка», вып. 4). Гостехтеориздат, 1951 г.

Л. А. Люстерник. «Выпуклые фигуры и многоугольники». Гостехтеориздат, 1956 г.

Б. Н. Делоне. Доказательство неравенства Брунна — Минковского. «Успехи математических наук», вып. II (1936 г.).

Н. Б. Васильев. Семейство параллельных n-угольников. «Квант», №11, 1974 г.; решение задачи М295, «Квант», № 6, 1975г.

Г. Хадвигер. Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии. М., «Наука», 1966 г.

задачник Кванта

Задачи

М376—М380; Ф388—Ф392

Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 июня 1976 г. по адресу: 113035, Москва, Ж-35, ул. Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта» М376» или «...Ф388». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).
После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

М376. а) В ряд расположено 30 клеток. На самой правой клетке стоит белая фишка, на самой левой — черная. Каждый из двух играющих по очереди передвигает свою фишку на одно поле — вперед или назад. (Пропускать ход нельзя.) Проигравшим считается тот, у кого нет хода. Кто выигрывает: начинающий или его партнер?

б) Решите задачу, заменив в условии 30 на N.

А. Талалай

М377. Дан треугольник ABC. Найти на стороне AC такую точку D, чтобы периметр треугольника ABD равнялся длине стороны BC.

С. Охитин

М378. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде

а) $x^3+y^3+z^3$, где x, y, z — целые числа;

б)* $x_1^n+x_2^n+\ldots+x_n^n$, где $x_1,\ldots,x_n$ — целые числа.

в)* Докажите, что любое рациональное число можно представить в виде $x^3+y^3+z^3$, где x, y, z — рациональные числа.

В. Колосов

М379. На каждом из нескольких кусков бумаги произвольной формы поставлена клякса (произвольной формы). Назовем промокашку подходящей для данного куска, если ее можно разместить внутри этого куска так, что она закроет кляксу. Пусть набор промокашек, имеющих форму кругов разных радиусов, обладает таким свойством: для произвольных двух данных кусков найдется промокашка, подходящая для каждого из них. Докажите, что тогда в этом наборе найдется одна промокашка, подходящая для всех кусков.

В. Произволов

М380* а). На плоскости дана выпуклая фигура и внутри нее — точка O. К каждой прямой l, проходящей через точку O, проводится перпендикуляр в точке O и на нем по обе стороны от точки O откладываются два отрезка, длины которых равны длине отрезка, получающегося при пересечении данной фигуры с прямой l. Объединение всех этих от-

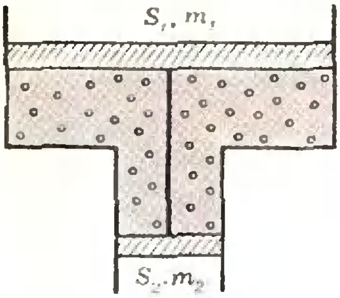


Рис. 1.

резков — новая фигура с центром симметрии O. Будет ли полученная фигура выпуклой?.

б) В пространстве дано выпуклое центрально-симметричное тело с центром O. К каждой плоскости α, проходящей через точку O, проводится перпендикуляр в точке O и на нем по обе стороны от этой точки O откладываются два отрезка, длины которых равны площади сечения данного тела плоскостью α. Объединение всех этих отрезков — новое тело с тем же центром симметрии O. Докажите, что полученное тело тоже выпуклое.

С. Пухов

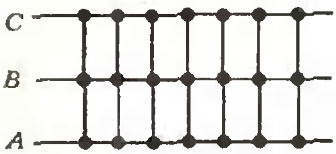


Рис. 2.

Ф388. В расположенном вертикально цилиндре переменного сечения (рис. 1) между поршнями находится n молей воздуха. Массы поршней — m_1 и m_2, их площади — S_1 и S_2 соответственно. Поршни соединены стержнем длины l и находятся на одинаковых расстояниях от стыка частей цилиндра с различными диаметрами. На сколько сместятся поршни при повышении температуры в цилиндре на Δt градусов?

Е. Кузнецов

Ф389. Найти сопротивление между точками A и B и точками A и C бесконечной цепочки, показанной на рисунке 2. Сопротивление проволочек между узлами схемы 1 *ом*.

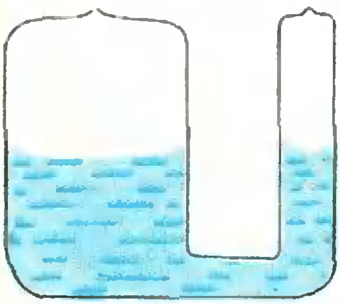


Рис. 3.

Ф390. Два запаянных сообщающихся сосуда цилиндрической формы разных диаметров частично заполнены водой (ртутью) (рис. 3). Воздух из сосудов откачан, так что над жидкостью имеются только ее пары. Как распределится количество жидкости в сосудах а) на земле? б) в невесомости?

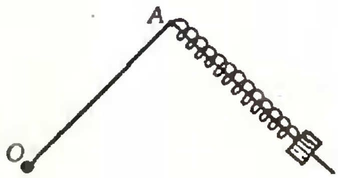


Рис. 4.

Ф391. Гладкий Г-образный стержень вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через конец стержня O. Маленькая муфта массы m прикреплена к стержню в точке A с помощью пружины жесткостью k (рис. 4). Длина пружины в 1,2 раза больше ее длины в нерастянутом состоянии. С какой угловой скоростью вращается стержень?

Рис. 5.

Ф392. Доска массы M расположена горизонтально и опирается на два вращающихся цилиндра (рис. 5). Расстояние между осями цилиндров l. Коэффициент трения между доской и цилиндрами k. Доказать, что если доску, находящуюся в положении равновесия, слегка толкнуть в горизонтальном направлении, она будет совершать гармонические колебания, и найти период этих колебаний. Каким будет движение доски, если изменить направление вращения цилиндров на противоположное?

Решения задач

М336, М337, М339; Ф348—Ф352

М336. В плоскости дано конечное множество многоугольников, каждые два из которых имеют общую точку. Докажите, что существует прямая, которая имеет общую точку с каждым из этих многоугольников.

Спроектируем все многоугольники на какую-нибудь горизонтальную прямую m. Проекцией каждого многоугольника будет отрезок. Среди правых концов этих отрезков выберем самый левый (пусть это будет правый конец A проекции многоугольника M — см. рисунок 1) и проведем через него прямую l, перпендикулярную прямой m. Прямая l пересекает все многоугольники, так как никакой многоугольник не может лежать целиком левее нее (тогда правый конец его проекции был бы левее A), и никакой не может лежать целиком правее (так как тогда он не имел бы общих точек с многоугольником M).

С. Фомин

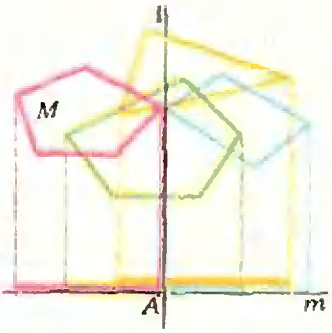


Рис. 1.

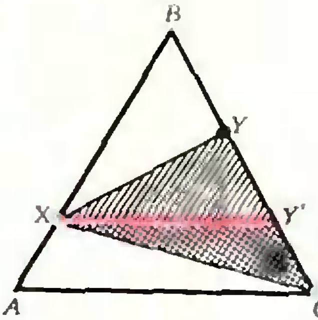


Рис. 2.

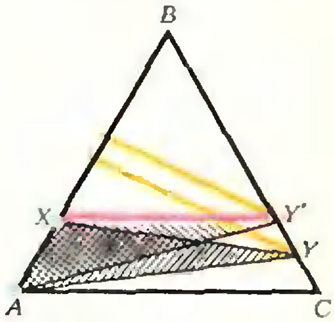


Рис. 3.

◆

М337. Дан равносторонний треугольник ABC со стороной длины 1. Первый игрок выбирает точку X на стороне AB, второй — точку Y на стороне BC, затем первый — точку Z на стороне AC.

а) Цель первого игрока — получить треугольник XYZ наибольшей площади, второго — наименьшей площади. Какую наибольшую площадь может обеспечить первый?

б) Цель первого игрока — получить треугольник XYZ наименьшего периметра, второго — наибольшего периметра. Какой наименьший периметр может обеспечить первый?

а) Докажем сначала, что наилучшая стратегия второго игрока — поставить точку Y на стороне BC, так, чтобы прямая XY оказалась параллельной стороне AC. Действительно, если $(XY') \parallel (AC)$, а $Y \in [BY']$ (см. рис. 2), то первый игрок своим вторым ходом поставит точку Z в вершину C; тогда $S_{XYC} > S_{XY'C}$, так как у этих треугольников высота одна и та же, а основание первого больше. Если же $Y \in [Y'C]$, то первый игрок поставит точку Z в вершину A, и опять будет $S_{XYA} > S_{XY'A}$, поскольку у этих треугольников одно и то же основание, а высота у треугольника XYA больше (рис. 3).

Поэтому $(XY) \parallel (AC)$, и от того, где на $[AC]$ первый игрок поставит точку Z, уже ничего не зависит:

$$S_{XYZ} = S_{XYA} = \frac{1}{2} \cdot |XY| \cdot (H - h),$$

(здесь $H = \frac{\sqrt{3}}{2}$ — высота треугольника ABC, h — высота треугольника XBY). Выразив $|XY|$ через h, получим, что

$$S_{XYZ}(h) = \frac{\sqrt{3}(hH - h^2)}{3},$$

то есть искомая площадь является квадратным трехчленом от h. Этот трехчлен принимает максимальное значение $\frac{H^2\sqrt{3}}{12} =$

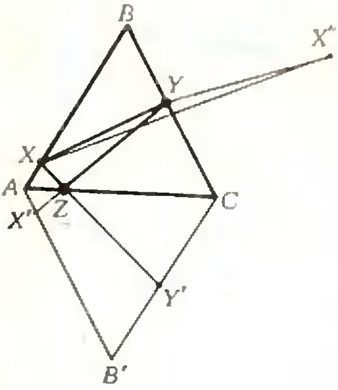


Рис. 4.

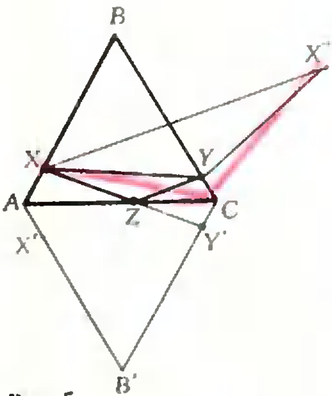


Рис. 5.

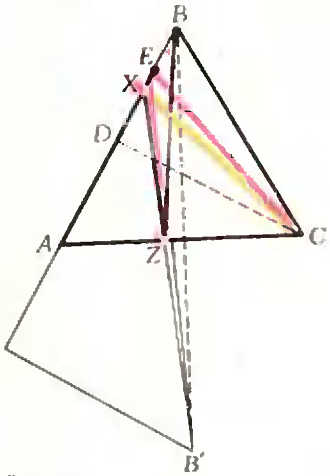


Рис. 6.

$=\frac{\sqrt{3}}{16}$, когда $h=\frac{H}{2}$, то есть когда первый игрок ставит точку X на середине стороны AB.

б) Покажем, что в этом случае наилучшая стратегия второго игрока — поместить точку Y в вершины B или C треугольника ABC. Предположим, что второй игрок поместил точку Y внутри $[BC]$. Пусть X', Y' и B' — точки, симметричные точкам X, Y и B относительно (AC), а X'' — точка, симметричная X' относительно (BC) (рис. 4). Поскольку $|XZ|=|X'Z|$, то точку Z первый игрок должен поставить в точку пересечения отрезков AC и $X'Y$. Цель второго игрока — сделать максимальной величину $|XY|+|XZ|+|YZ|=|XY|+|X'Y|=|XY|+|X''Y|$. Но если точка Y — не в вершине B, причем Y и B лежат по одну сторону от прямой XX'' (как на рисунке 4), то $|XY|+|X''Y|<|XB|+|X''B|$ (поскольку длина объемлющей ломаной больше); поэтому второму игроку, конечно же, нужно ставить точку Y в вершину B. Если же точки Y и B лежат по разные стороны от прямой XX'' и точка Y — не в вершине C (см. рис. 5), то $|XY|+|X''Y|<|XC|+|X''C|$; следовательно, при правильной игре второй игрок не поставит точку Y в н у т р ь отрезка BC.

Итак, мы доказали, что второй игрок поставит точку Y или в вершину B, или в вершину C.

Если точка Y — в вершине C, то первый игрок своим вторым ходом поставит точку Z тоже в C, и тогда периметр «треугольника XYZ», вырождающегося в данном случае в отрезок XC, равен $2|XC|$. Если же точка Y — в вершине B, то точка Z должна быть поставлена в точку пересечения отрезков AC и XB', где B' — точка, симметричная точке B относительно (AC), поскольку именно такому положению точки Z отвечает треугольник XBZ *наименьшего* периметра $|XB|+|XB'|$.

Теперь заметим, что величина $|XC|$ убывает при приближении точки X к середине D стороны AB, а сумма $|XB|+|XB'|$ убывает при приближении точки X к точке B. Значит, точка X должна лежать где-то на отрезке DB. Покажем, что если существует на $[DB]$ такая точка E, что $2|CE|=|EB|+|EB'|$, то первый игрок должен поставить точку X именно в эту точку. В самом деле, при смещении X от точки E к точке B второй игрок ставит точку Y в вершину C, увеличивая тем самым периметр $\triangle XYZ$, равный $2|XC|$ (по сравнению с $2|EC|$). Если же первый игрок сместит точку X от точки E ближе к точке D, то второй игрок, поставив точку Y в вершину B, снова увеличит периметр $\triangle XYZ$, равный $|XB|+|XB'|$ (по сравнению с периметром $\triangle EBZ$).

Поэтому нужно проверить существование точки $E\in[DB]$, для которой $2|EC|=|EB|+|EB'|$.

Обозначим $|AE|$ через x; $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$. Тогда

$$|EC|=\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}, \quad |EB|=1-x,$$

$$|EB'|=\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

(см. рис. 6), и мы получаем уравнение:

$$2\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=$$

$$=1-x+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}. \qquad (*)$$

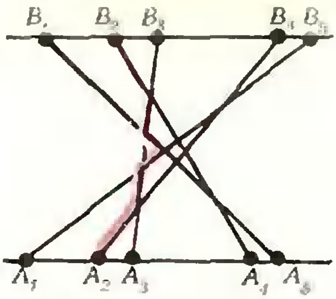


Рис. 7.

Возведя обе части уравнения (*) в квадрат, получим:

$$2x^2-3x+2=2(1-x)\sqrt{x^2+x+1},$$

откуда

$$8x^3-17x^2+8x=0,$$

$$x=|AE|=\frac{17-\sqrt{33}}{16}$$

(проверьте, что это действительно корень уравнения (*)). Искомый периметр равен

$$2|EC|=2\sqrt{x^2-x+1}=\frac{3}{8}\sqrt{2(17-\sqrt{33})}.$$

М. Бронштейн

◆

М339*). *Дана горизонтальная полоса на плоскости, края которой — параллельные прямые, и n прямых, пересекающих эту полосу. Каждые две из этих n прямых пересекаются внутри полосы и никакие три не проходят через одну точку. Рассмотрим все пути, начинающиеся на нижней кромке полосы, идущие по данным прямым и заканчивающиеся на верхней кромке, обладающие таким свойством: идя по такому пути, мы все время поднимаемся вверх; дойдя до точки пересечения прямых, мы обязаны перейти на другую прямую. Докажите, что среди таких путей*

а) есть путь, состоящий не менее чем из n отрезков;

б) есть путь, проходящий не более чем по $\frac{n}{2}+1$ прямым;

в) есть путь, проходящий по всем n прямым.

Обозначим точки пересечения прямых с нижней кромкой полосы по порядку (слева направо) через $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (рис. 7). Точки пересечения тех же прямых с верхней кромкой полосы мы обозначим соответственно через $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

Перечислим некоторые свойства путей, о которых говорится в условии.

1°. *По каждому отрезку каждой прямой проходит ровно один путь.* Действительно, правила, сформулированные в условии, позволяют единственным способом продолжить путь вверх и вниз до краев полосы.

2°. *Существует n различных путей:* из каждой точки $A_1, \ldots, A_n$ выходит свой путь. Занумеруем их по порядку: 1-й, 2-й, ..., n-й.

3°. *Путь, начинающийся в точке A_k, заканчивается в точке B_k.* В самом деле, согласно правилам, каждый путь в точке пересечения прямых переходит на другую прямую, поэтому (рис. 8) пути не могут пересекать друг друга, а лишь соприкасаются вершинами. Таким образом, k-й путь делит полосу на две области — левую, в которой расположены все пути с номерами $i<k$, и правую, в которой расположены пути с номерами $i>k$. Поэтому k-й путь окончится в B_k (рис. 9).

Перейдем к доказательству отдельных утверждений задачи.

а) Посчитаем двумя способами общее количество отрезков во всех путях вместе. С одной стороны, каждая прямая разбита на n отрезков, поскольку она пересечена $n-1$ другими прямыми; следовательно, общее число отрезков равно n^2. С другой стороны, ту же сумму n^2 мы должны получить, сложив количества отрезков во всех n путях (мы используем здесь 1° и 2°). Отсюда следует, что хотя бы в одном из путей не менее n отрезков.

б) Оценим количество отрезков в двух крайних путях: 1-м и n-м. Эти пути, очевидно, ограничивают выпуклые множества: первый — множество точек, лежащих левее всех прямых, последний — множество точек, лежащих правее всех прямых (рис. 10). Ясно, что первый путь лежит слева от ломаной A_1PB_1, последний — справа от ломаной A_nPB_n, где P — точка пересечения (A_1B_n) и (A_nB_1), и лишь начальные и конечные отрезки того и другого пути лежат на прямых A_1B_n и A_nB_1. Что же касается каждой из остальных $n-2$ прямых $A_2B_{n-1}, A_3B_{n-2}, \ldots, A_{n-1}B_2$, то они могут иметь об-

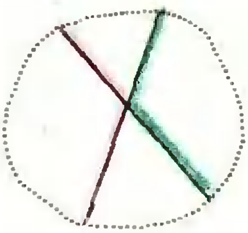


Рис. 8.

*) Решение задачи М338 см. в статье Ю. Ионина и Л. Курляндчика «Поиск инварианта», опубликованной в «Кванте», 1976, № 2.

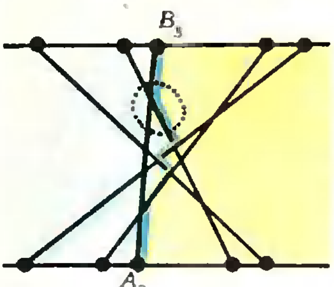


Рис. 9.

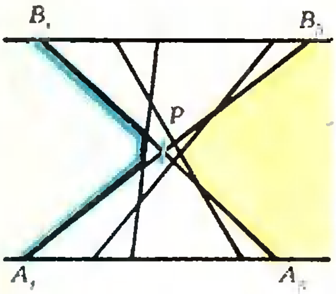


Рис. 10.

щий отрезок только с о д н и м из крайних путей (если прямая проходит слева от точки P, то она не может иметь общий отрезок с правым крайним путем, и наоборот). Из выпуклости крайнего пути вытекает, что каждая из этих $(n-2)$ прямых имеет с ним не более одного отрезка. Таким образом, количество отрезков в двух крайних путях не больше $4+(n-2)$. Отсюда следует, что хотя бы в одном из этих путей не более $2+(n-2)/2=1+n/2$ отрезков.

в) Пусть $m=(n+1)/2$, если n нечетно (тогда m — средний номер между 1 и n), и $m=n/2$, если n четно. Докажем, что m-й путь проходит по всем n прямым. Выше (3°) мы говорили, что m-й путь делит полосу на две области, начинается в точке A_m и заканчивается в точке B_m. Каждая из n прямых A_1B_n, $A_2B_{n-1}, \ldots, A_mB_{n+1-m}, \ldots, A_nB_1$, как нетрудно видеть, начинается в одной области (быть может, на ее границе), а заканчивается — в другой. Следовательно, она имеет с m-м путем общую точку. Но по правилу «перехода» она должна тогда иметь с этим путем и общий отрезок. Итак, m-й путь имеет общий отрезок с каждой прямой.

Любопытным, но, видимо, очень трудным вопросом, связанным с этой задачей, является отыскание возможного числа отрезков в максимальном (по числу отрезков) пути. Можно убедиться (попробуйте!), что для $n=3$ максимальный путь всегда состоит из 3 отрезков, для $n=4$ он может состоять из 5 или 6 отрезков, для $n=5$ — из 6, 7 или 8. Интересно было бы найти те границы c_n и C_n, между которыми заключена длина максимального пути для n прямых (или хотя бы получить для c_n и C_n хорошие оценки и выяснить порядок роста c_n и C_n при $n\to\infty$).

Н. Васильев

◆

Ф348. *Космический корабль подходит к Луне по параболической траектории, почти касающейся поверхности Луны. Чтобы перейти на стелющуюся круговую орбиту (т. е. круговую орбиту, очень близкую к поверхности Луны), в момент наибольшего сближения с Луной включается тормозной двигатель. Определить, на сколько изменится скорость корабля при выполнении этого маневра. Ускорение свободного падения на поверхности Луны $g_Л \approx 1{,}7$ м/сек², радиус Луны $R_Л \approx 1{,}7\cdot10^6$ м.*

Д о п о л н и т е л ь н ы й в о п р о с. Попробуйте оценить, какую часть начальной массы корабля должно составлять сожженное горючее, если двигатель выбрасывает продукты сгорания с относительной скоростью $v=4\cdot10^3$ м/сек.

При движении тел в поле тяготения планеты (или звезды) полная механическая энергия (т. е. сумма кинетической и потенциальной энергий) сохраняется. В зависимости от величины полной энергии E траектории имеют различный характер*). При $E<0$ тело не может удалиться на бесконечно большое расстояние; в этом случае его траектория имеет вид эллипса (первый закон Кеплера). При $E>0$ тело удаляется на бесконечность, имея некоторый запас кинетической энергии (гиперболическая траектория). При $E=0$ тело также уходит на бесконечность, но в этом случае его скорость на бесконечности обращается в нуль; траектория тела имеет вид параболы. При движении по параболической траектории скорость тела вблизи поверхности планеты равна второй космической скорости. Так принято называть минимальную скорость, при которой тело, стартуя с поверхности планеты, может удалиться от нее на бесконечно далекое расстояние. Для точки наибольшего сближения с Луной (рис. 11) можно записать:

$$E=K+\Pi=\frac{mv_{II}^2}{2}-\gamma\frac{M_Л m}{R_Л}=\frac{mv_{II}^2}{2}-g_Л R_Л m=0.$$

Здесь v_{II} — скорость корабля в момент наибольшего сближения с Луной (вторая космическая скорость); $\Pi=-\gamma\dfrac{M_Л m}{R_Л}$ — потенциальная энергия корабля вблизи поверхности Луны**).

---

*) См., например, статью К. К о в а л е н к о и М. К р е й н а «Баллистическая задача в космосе», «Квант», 1973, № 5.

**) См., например, статью С. К о з е л а «Физические аналогии», «Квант», 1975, № 11.

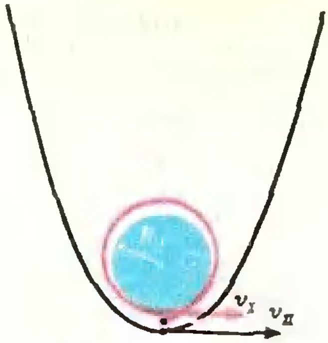


Рис. 11.

Для скорости v_{II} получим:

$$v_{II}=\sqrt{2g_Л R_Л}\approx 2{,}4\cdot 10^3\ м/сек.$$

В процессе торможения скорость корабля должна по условию задачи уменьшиться до первой космической скорости (для Луны) v_I. Эта скорость может быть определена из условия движения корабля по круговой орбите:

$$\frac{mv_I^2}{R_Л}=\gamma\frac{M_Л m}{R_Л^2}=g_Л m;\quad v_I=\sqrt{g_Л R_Л}\approx 1{,}7\cdot 10^3\ м/сек.$$

Таким образом, скорость корабля должна измениться на величину

$$\Delta v=v_{II}-v_I\approx 0{,}7\cdot 10^3\ м/сек.$$

Чтобы ответить на второй (дополнительный) вопрос и оценить массу m сожженного топлива, можно воспользоваться законом сохранения импульса. Предположим для упрощения расчета, что продукты сгорания массы m были выброшены из сопла ракеты в виде одной порции с относительной скоростью v. Запишем закон сохранения импульса в системе отсчета, связанной с кораблем, движущимся со скоростью v_{II}:

$$(M_0-m)\Delta v=mv,$$

где M_0 — первоначальная масса корабля. Отсюда

$$m=\frac{\Delta v}{v+\Delta v}M_0\approx 0{,}15\ M_0,$$

т. е. сожженное топливо должно составлять приблизительно 15% от первоначальной массы корабля.

Можно найти массу топлива более строго. Для этого нужно воспользоваться формулой Циолковского. Эта формула выражает изменение скорости космического корабля Δv через отношение его начальной M_0 и конечной M масс:

$$\Delta v=v\ln\frac{M_0}{M}$$

(v — относительная скорость истечения продуктов сгорания). Отсюда

$$M=M_0e^{-\frac{\Delta v}{v}}=M_0\ e^{-0{,}175}\approx 0{,}84\ M_0,$$

т. е. сожженное горючее должно составлять примерно 16% от начальной массы корабля.

Отметим, что формула Циолковского учитывает непрерывный процесс истечения продуктов сгорания из сопла ракеты, поэтому полученный с ее помощью результат является более точным.

С. Козел

◆

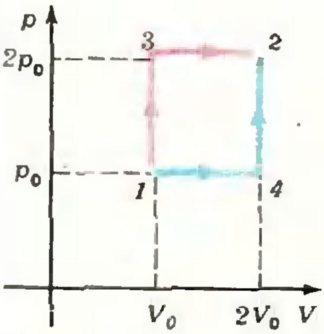


Рис. 12.

Ф349. *Один киломоль идеального одноатомного газа, находящегося при нормальных условиях, переводят из состояния 1 в состояние 2 двумя способами: 1 → 3 → 2 и 1 → 4 → 2 (рис. 12). Найти отношение количеств теплоты, которые необходимо сообщить газу в этих двух процессах.*

Согласно первому закону термодинамики сообщаемое газу количество теплоты Q идет на изменение внутренней энергии газа ΔU и на совершение газом работы A:

$$Q_I=\Delta U_I+A_I,\quad Q_{II}=\Delta U_{II}+A_{II}.$$

Здесь индекс I относится к процессу 1 → 3 → 2, а индекс II — к процессу 1 → 4 → 2.

Так как газ одноатомный, то для одного моля

$$U=\frac{3}{2}RT,\quad и\quad \Delta U=\frac{3}{2}R\Delta T.$$

Отсюда видно, что изменение внутренней энергии газа при переходе из состояния 1 в состояние 2 зависит только от изменения температуры газа $\Delta T=T_2-T_1$ и не зависит от

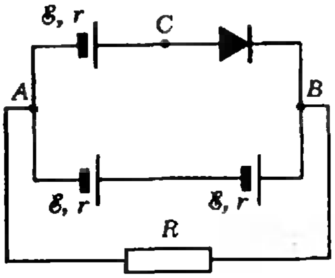


Рис. 13.

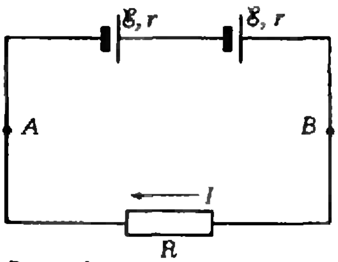


Рис. 14.

того, каким способом газ переводят из одного состояния в другое. Следовательно,

$$\Delta U_{I} = \Delta U_{II} = \Delta U = \frac{3}{2} R (T_2 - T_1).$$

Для того чтобы найти температуры газа T_1 и T_2, запишем уравнения состояния идеального газа для состояний *1* и *2* (см. рис. 12):

$$p_0 V_0 = RT_1, \qquad 2p_0 \cdot 2V_0 = RT_2,$$

откуда

$$T_2 - T_1 = \frac{3p_0V_0}{R}, \text{ и } \Delta U = \frac{9}{2} p_0 V_0.$$

Теперь найдем работы газа A_I и A_{II}. В первом случае (процесс $1 \to 3 \to 2$) на участке $1 \to 3$ газ работы не совершает, а при изобарном расширении на участке $3 \to 2$ газ совершает работу

$$A_I = p\Delta V = 2p_0(2V_0 - V_0) = 2p_0V_0.$$

Во втором случае (процесс $1 \to 4 \to 2$) газ совершает работу только на участке $1 \to 4$:

$$A_{II} = p_0(2V_0 - V_0) = p_0V_0.$$

Таким образом,

$$Q_I = \Delta U + A_I = \frac{13}{2} p_0V_0,$$

$$Q_{II} = \Delta U + A_{II} = \frac{11}{2} p_0V_0.$$

Отношение количеств теплоты равно

$$\frac{Q_I}{Q_{II}} = \frac{13}{11}.$$

◆

Ф350. *Найти зависимость падения напряжения на сопротивлении R в схеме, показанной на рисунке 13, от величины этого сопротивления. Э. д. с. всех источников равны $\mathscr{E}$, их внутренние сопротивления r. Диод считать идеальным (его сопротивление в прямом направлении равно нулю, а в обратном бесконечно велико).*

Если сопротивление R велико, ток, идущий по нему, очень мал, и разность потенциалов между точками B и A (см. рис. 13) близка к $2\mathscr{E}$. При этом потенциал точки B выше потенциала точки C (равного $\mathscr{E}$, если считать потенциал точки A равным нулю), диод закрыт, и ток по участку цепи ACB не идет. Тогда данную схему можно заменить простой схемой с двумя источниками, включенными последовательно с сопротивлением R (рис. 14). В этой цепи идет ток $I = \frac{2\mathscr{E}}{2r + R}$, и падение напряжения на сопротивлении R равно

$$U_R = \frac{2\mathscr{E} R}{2r + R}.$$

По мере уменьшения сопротивления R ток в цепи растет, увеличивается падение напряжения на внутренних сопротивлениях источников, а разность потенциалов между точками B и A уменьшается. Так будет происходить до тех пор, пока потенциал точки B не станет равным потенциалу точки C, т. е. пока диод остается закрытым. Диод откроется в тот момент, когда напряжение между точками B и C станет равным нулю, а между точками B и A — $\mathscr{E}$. Значит, в этот момент падение напряжения на сопротивлении R равно $\mathscr{E}$, т. е.

$$\frac{2\mathscr{E} R}{2r + R} = \mathscr{E}, \text{ или } R = 2r.$$

Теперь найдем напряжение на сопротивлении R, когда $R < 2r$. В этом случае сопротивление диода равно нулю, и схему можно представить так, как показано на рисунке 15.

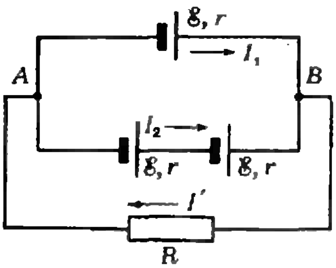


Рис. 15.

В этом случае

$$U'_R = I'R = \mathscr{E} - I_1 r = 2\mathscr{E} - I_2 \cdot 2r,$$
$$I' = I_1 + I_2.$$

Отсюда

$$I' = \frac{4\mathscr{E}}{2r + 3R} \quad \text{и} \quad U'_R = \frac{4\mathscr{E}R}{2r + 3R}.$$

Таким образом,

$$U_R = \frac{2\mathscr{E}R}{2r + R} \quad \text{при} \quad R \geqslant 2r,$$

$$U_R = \frac{4\mathscr{E}R}{2r + 3R} \quad \text{при} \quad R \leqslant 2r.$$

◆

Ф351. *При слабом ударе футбольного мяча о стенку он деформируется, как показано на рисунке 16. При этом деформация x много меньше радиуса мяча R, и можно с хорошим приближением считать, что давление p воздуха в мяче в процессе удара не меняется.*

Пренебрегая упругостью покрышки, оценить время соударения мяча со стенкой. Провести числовой расчет для случая, когда масса мяча $m = 0{,}5$ кг, давление в нем $p = 2$ атм и радиус $R = 12{,}5$ см.

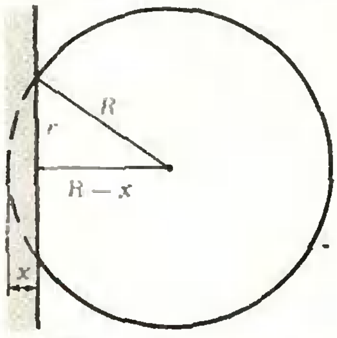


Рис. 16.

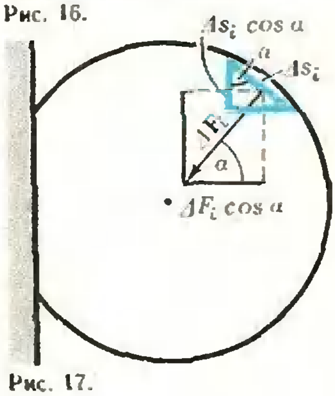


Рис. 17.

Рассмотрим силы, действующие на мяч во время удара. Это — сила реакции со стороны стенки $\mathbf{N}$ и сила атмосферного давления $\mathbf{F}_а$.

Согласно третьему закону Ньютона сила $\mathbf{N}$ численно равна и противоположно направлена силе давления мяча на стенку $\mathbf{F}_д$. Так как упругостью покрышки мяча можно пренебречь, то

$$N = F_д = pS = p\pi r^2$$

($S = \pi r^2$ — площадь соприкосновения мяча со стенкой, см. рис. 16). Направлена сила $\mathbf{N}$ перпендикулярно к стенке, т. е. по горизонтали вправо.

Для того чтобы найти силу атмосферного давления, разобьем поверхность соприкосновения мяча с окружающим воздухом на малые участки с площадью Δs_i. На каждый участок действует сила атмосферного давления $\Delta \mathbf{F}_i$ (рис. 17), направленная перпендикулярно к поверхности и равная по абсолютной величине $\Delta F_i = p_0 \Delta s_i$ (p_0 — атмосферное давление). Благодаря симметрии ясно, что вертикальные проекции всех сил $\Delta \mathbf{F}_i$ в сумме дают нуль, так что равнодействующая $\mathbf{F}_а = \sum \Delta \mathbf{F}_i$ направлена горизонтально влево и равна по модулю (см. рис. 17)

$$F_а = \sum \Delta F_i \cos\alpha = p_0 \sum \Delta s_i \cos\alpha.$$

Величина $\Delta s_i \cos\alpha$ — это проекция площади i-го участка на вертикальную плоскость, а $\sum \Delta s_i \cos\alpha$ — сумма таких проекций, равная проекции площади поверхности соприкосновения мяча с окружающим воздухом, т. е.

$$\sum \Delta s_i \cos\alpha = \pi r^2, \quad \text{и} \quad F_а = p_0 \pi r^2.$$

Найдем теперь абсолютное значение силы $\mathbf{F} = \mathbf{N} + \mathbf{F}_а$:

$$F = N - F_а = (p - p_0)\pi r^2 = (p - p_0)\pi[R^2 - (R - x)^2] =$$
$$= (p - p_0)\pi(2Rx - x^2).$$

Поскольку деформация мяча x мала по сравнению с его радиусом R, то величиной x^2 можно пренебречь по сравнению с величиной $2Rx$. Тогда $F = 2\pi R(p - p_0)x$, или с учетом, что эта сила направлена противоположно деформации,

$$F = -2\pi R(p - p_0)x = -kx.$$

Таким образом, сила F пропорциональна величине деформации x ($k = 2\pi R(p - p_0)$ — коэффициент пропорциональности; он не меняется в процессе удара), т. е. носит упругий характер. Под действием такой силы тело может совершать колебания с периодом $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$, где m — масса тела.

Очевидно, что время соударения мяча со стенкой τ как раз равно половине периода колебаний, т. е.

$$\tau = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \sqrt{\frac{\pi m}{2R(p-p_0)}} \approx 8\cdot 10^{-3}\ сек.$$

◆

Ф352. *Для регулирования напряжения на нагрузке собрана схема, показанная на рисунке 18. Сопротивления нагрузки и регулировочного реостата равны R. Нагрузка подключена к половине реостата. Напряжение $U_{вх}$ на входе цепи увеличивается вдвое. Как изменить положение движка реостата для того, чтобы напряжение на нагрузке осталось прежним?*

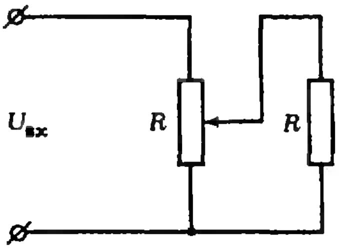


Рис. 18.

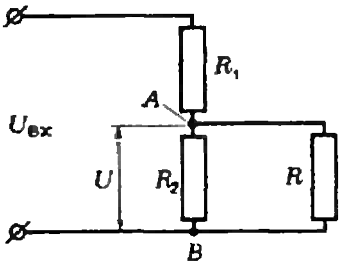


Рис. 19.

Найдем выражение для напряжения на нагрузке в общем случае.

Обозначим через R_1 и R_2 сопротивления частей реостата, на которые его делит движок, и перерисуем схему так, как показано на рисунке 19.

Напряжение на нагрузке равно напряжению на участке AB, содержащем параллельно соединенные сопротивления R и R_2. Их можно заменить одним эквивалентным сопротивлением $R_э = \frac{RR_2}{R+R_2}$.

Напряжение на этом эквивалентном сопротивлении (а значит, и на нагрузке), очевидно, равно $U = IR_э$, где

$I = \frac{U_{вх}}{R_1+R_э}$ — ток в цепи, т. е. $U = U_{вх}\frac{R_э}{R_1+R_э}$.

Так как $R_1 = R - R_2$, то

$$U = U_{вх}\frac{R_э}{R-R_2+R_э} = U_{вх}\frac{RR_2}{R^2-R_2^2+RR_2}.$$

Разделим числитель и знаменатель в этой формуле на R^2:

$$U = U_{вх}\frac{\alpha}{1-\alpha^2+\alpha}, \quad где\ \alpha = \frac{R_2}{R}.$$

В первоначальной цепи $R_2 = R/2$, т. е. $\alpha_1 = 1/2$ и напряжение на нагрузке

$$U_1 = U_{вх}\frac{1}{2(1-1/4+1/2)} = \frac{2}{5}U_{вх}. \qquad (1)$$

При увеличении напряжения на входе цепи вдвое напряжение на нагрузке

$$U_2 = 2U_{вх}\frac{\alpha_2}{1-\alpha_2^2+\alpha_2}, \qquad (2)$$

где α_2 — новое значение отношения R_2/R.

Но по условию задачи напряжение на нагрузке в обоих случаях должно быть одним и тем же. Поэтому согласно равенствам (1) и (2)

$$\frac{2}{5}U_{вх} = 2U_{вх}\frac{\alpha_2}{1-\alpha_2^2+\alpha_2}.$$

Отсюда

$$\alpha_2^2 + 4\alpha_2 - 1 = 0.$$

Решая это уравнение, получим

$$\alpha_2 = -2 \pm \sqrt{4+1} = -2 \pm \sqrt{5}.$$

Так как $\alpha_2 > 0$, то оно равно $\sqrt{5}-2$. Следовательно, движок нужно передвинуть так, чтобы

$$R_2 = (\sqrt{5}-2)R.$$

И. Слободецкий

Читатели советуют

В редакцию нашего журнала приходит много писем и заметок, касающихся тематики «Практикума абитуриента». Большинство из них посвящено частным вопросам, и тогда редакция отвечает лишь их авторам. Но некоторые содержат соображения и замечания, с которыми, на наш взгляд, полезно познакомить всех читателей «Кванта». Но считая возможным публиковать такие письма и заметки полностью, редакция решила подготовить подборку материалов, составленную по идеям и предложениям читателей журнала. Мы надеемся, что обсуждаемые в подборке отдельные теоретические вопросы школьного курса и решения ряда задач будут полезны поступающим в вузы.

На вступительных экзаменах довольно часто встречаются задачи на смешивание кислот с водой, спирта с водой, на получение растворов той или иной концентрации. Такого рода задачи в школе решают, исходя из предположения об *аддитивности объемов* при смешивании, т. е. считая, что объем смеси равен сумме объемов смешиваемых жидкостей. Между тем с точки зрения химии это предположение несостоятельно. Оно ведет к неприемлемым отклонениям от верных результатов при решении задач на смешивание с водой азотной, серной, уксусной, фосфорной, соляной кислот, этилового спирта и других жидкостей.

Убедимся в этом на примере следующей задачи.

Пример 1. *Сколько миллилитров 100 %-й азотной кислоты надо влить в 1000 миллилитров воды для получения 50 %-й кислоты? Температура кислоты и воды* 20°C.

Казалось бы, проще всего задачу решить так. Обозначим искомый объем безводной кислоты через x *мл*. Тогда в $(1000+x)$ *мл* раствора будет содержаться x *мл* чистой кислоты, что должно составлять 50 %. Другими словами, получаем уравнение

$$\frac{x}{1000+x}=\frac{1}{2},$$

имеющее корень $x=1000$ *мл*.

Однако надо иметь в виду, что *процентной концентрацией* кислот называют (если специально не оговорено противное) *количество граммов массы растворенного вещества, содержащееся в 100 граммах массы раствора*. Поэтому правильное решение требует прежде всего определения массы компонентов составляемого раствора и получающейся кислоты по формуле $m=d\cdot V$, где m — масса жидкости, d — плотность, V — объем. Поскольку объем жидкости меняется в зависимости от ее температуры, значение плотности d следует брать соответствующим указанной в условии температуры. Для различных кислот имеются специальные таблицы, содержащие величину плотности раствора при разных температурах.

Например, при 20°C плотность 100 %-й азотной кислоты приближенно равна 1,51 *г/см*^{3}, а плотность 50 %-й азотной кислоты 1,31 *г/см*^{3}; плотность воды при 20°C составляет 0,998 *г/см*^{3}.

Приведем теперь решение задачи, основанное на предположении об аддитивности объемов. Ясно, что масса чистой кислоты в 50 %-м растворе совпадает с массой влитой 100 %-й кислоты, т. е. равна $1{,}51\cdot x$ *г*, где x — искомый объем безводной кислоты. Если считать, что объем 50 %-й кислоты равен $(1000+x)$ *мл*, то ее масса $1,31\cdot(1000+x)$ *г* и, следовательно, в ней содержится $0,5\cdot1,31\times\times(1000+x)$ *г* чистой кислоты. Получаем уравнение

$$1,51x=0,5\cdot1,31(1000+x),$$

откуда $x\approx766$ *мл*.

Можно рассуждать и несколько иначе. Масса x *мл* чистой кислоты равна $1,51\cdot x$ *г*, масса 1000 *мл* воды равна 998 *г*, а масса 50%-го раствора составляет $1,31\cdot(1000+x)$ *г*. Так как суммарная масса компонентов совпадает с массой раствора, то приходим к уравнению

$$1,51x+998=1,31(1000+x),$$

откуда $x\approx1560$ *мл*.

Мы видим, что эти два решения приводят к совершенно различным результатам. На самом деле *оба эти решения неверны*. Впрочем, грубая ошибочность второго результата очевидна: если к литру воды добавить больше полутора литров чистой кислоты, то концентрация получающегося раствора будет заведомо выше 50%.

Причина ошибки заключается в том, что предположение об аддитивности объемов, которое было использовано в обоих решениях, не соответствует действительности. При смешивании кислот с водой происходит существенное объемное сжатие; его можно объяснить действием сил межмолекулярного притяжения (молекулы воды сближаются с молекулами кислоты, проникая в «пустоты» между ними). Поэтому решение задач на смешивание жидкостей должно основываться на законе сохранения масс: *суммарная масса компонентов раствора равна массе самого раствора*.

Правильное решение рассматриваемой задачи состоит в следующем. Масса x *мл* чистой кислоты равна $1,51\cdot x$ (*г*), масса 1000 *мл* воды равна $0,998\cdot1000=998$ (*г*), так что суммарная масса компонентов раствора составляет $(998+1,51x)$ (*г*) (и действительный объем 50%-го раствора кислоты равен $\frac{998+1,51x}{1,31}$ *мл*). Поскольку масса чистой кислоты в 50%-м растворе совпадает с массой влитой 100%-й кислоты, то получаем уравнение $1,51x=0,5\cdot(998+1,51x)$, откуда находим $x\approx661$ *мл*.

Упражнения

1. Какой объем 91%-й серной кислоты надо добавить при 15°С к 1 *л* воды, чтобы получить электролит для аккумулятора автомобиля — раствор серной кислоты с плотностью 1,290 *г/см*^{3}?

Плотность 91%-й серной кислоты при 15°С равна 1,825 *г/см*^{3}; серная кислота с плотностью 1,290 *г/см*^{3} при 15°С имеет концентрацию 38,03%; плотность воды при 15°С составляет 0,999 *г/см*^{3}.

2. Сколько воды надо влить в 800 *мл* 100%-й уксусной кислоты для получения 65%-го раствора? Смешивание производится при 20°С.

Плотность при 20°С 100%-й уксусной кислоты — 1,0498 *г/см*^{3}; воды — 0,998 *г/см*^{3}.

А. Азия (Одесса)

* * *

В своем письме в редакцию *Нгуен Конг Кви* (Ханой, ДРВ) предлагает вниманию читателей журнала довольно интересный геометрический факт, и любители математики, без сомнения, по достоинству это оценят. Решение приводимой задачи — хорошая проверка того, насколько активно усвоен материал курса планиметрии.

3. На плоскости дана окружность с взаимно перпендикулярными диаметрами AB и CD и прямая m, параллельная прямой AB. Через точку T окружности (отличную от точек C и D) проведена касательная к ней, пересекающая прямую AB в точке K и прямую m в точке M. Пусть E и F — точки пересечения прямой m с прямыми KC и KD соответственно. Доказать, что произведение длин отрезков ME и MF не зависит ни от радиуса окружности, ни от выбора точки T на окружности.

* * *

В тригонометрических преобразованиях и, в частности, при решении тригонометрических уравнений иногда бывает полезно представить выражение $a\sin x+b\cos x$ в следующем виде:

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi). \quad (1)$$

Появляющийся в этой формуле угол φ обычно называют *вспомогательным углом*. Как известно, он определяется соотношениями

$$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad (2)$$

с точностью до слагаемого $2\pi n$(где $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$). Поэтому достаточно указать один угол φ, лежащий в каком-нибудь промежутке длины 2π, чтобы получить все остальные значения вспомогательного угла.

Обратим внимание на следующую простую явную формулу для вспомогательного угла, которая отсутствует в школьных учебниках, но удобна при решении задач, особенно уравнений с параметром. Выберем в качестве промежутка длины 2π промежуток $-\pi<\varphi\leqslant\pi$. Тогда единственный угол φ, лежащий в этом промежутке и удовлетворяющий обоим соотношениям (2), определяется формулой

$$\varphi=\begin{cases}\arccos\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, & \text{если } b\geqslant 0;\\ -\arccos\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, & \text{если } b<0.\end{cases} \qquad (3)$$

В самом деле, независимо от знака b оба угла (3) удовлетворяют второму соотношению (2), а первому соотношению (2) в промежутке $-\pi<\varphi\leqslant\pi$ при $b\geqslant0$ удовлетворяет только $\varphi=\arccos\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и при $b<0$ — только

$$\varphi=-\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Следует напомнить, что ни одно из соотношений (2), взятое отдельно (или вытекающее из них соотношение $\operatorname{tg}\varphi=b/a$, также взятое отдельно), не является достаточным для нахождения вспомогательного угла: оно определяет в промежутке длины 2π два угла, из которых только один удовлетворяет обоим соотношениям (2). Так, если $a=-1$, $b=\sqrt{3}$, то уравнение $\operatorname{tg}\varphi=b/a$ имеет в промежутке $-\pi<\varphi\leqslant\pi$ два корня: $-\pi/3$ и $2\pi/3$, но лишь для второго из них справедливо равенство (1).

Преимущества формулы (3) легко увидеть на следующем примере.

Пример 2 (МИЭМ, 1972). *Решить уравнение*

$$\sin^6 x+\cos^6 x=a\sin 4x,$$

где a — параметр.

Двукратным понижением степеней в левой части уравнение приводится к виду

$$a\sin 4x-\frac{3}{8}\cos 4x=\frac{5}{8},$$

откуда с помощью формул (1) и (3) получаем:

$$\sqrt{a^2+\frac{9}{64}}\sin(4x+\varphi)=\frac{5}{8},$$

$$\varphi=-\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+\frac{9}{64}}}.$$

Ясно, что решения этого уравнения существуют при

$$\frac{5}{8}\leqslant\sqrt{a^2+\frac{9}{64}},$$

т. е. при $|a|\geqslant{}^1/_2$, и даются формулой

$$x=\frac{(-1)^n}{4}\arcsin\frac{5}{\sqrt{64a^2+9}}+\frac{1}{4}\arccos\frac{8a}{\sqrt{64a^2+9}}+\frac{\pi n}{4},$$

где n — целое. Использование формулы (3) привело к весьма компактной записи результата (ср. с ответом, приведенным в «Кванте», 1973, № 7, с. 47, 60—61).

В. Ритус (Москва)

* *
*

Как известно, некоторые «нестандартные» уравнения удается решить, если найти удачную замену неизвестного. Попробуйте отыскать такую замену для уравнения, которое прислал в редакцию ученик 8 класса *С. Ахмедов* (станция Минджевань Азербайджанской ССР).

4. Решить уравнение

$$\frac{x^4+4}{x^2-2}-5x=0 .$$

* *
*

Иногда даже несложная геометрическая задача дает повод для своеобразного самостоятельного исследования, если пытаться выяснить существенность того или иного предположения, изменять условие задачи и рассматривать более общие конфигурации. *У. Алла* (г. Выру Эстонской ССР) предлагает читателям журнала провести такое исследование, начав со следующей задачи.

5. В трапеции $ABCD$ проведены диагонали, пересекающиеся в точке O. Доказать, что площади образовавшихся четырех треугольников связаны соотношением

$$S_{\triangle AOB}\cdot S_{\triangle COD}=S_{\triangle BOC}\cdot S_{\triangle DOA}.$$

Попытайтесь установить обобщения этого соотношения при различных более общих предположениях.

6. Пусть диагонали A_1A_3 и A_2A_4 выпуклого четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$ пересекаются в точке O. Обозначим площади треугольников A_1OA_2, A_2OA_3, A_3OA_4, A_4OA_1 через S_1, S_2, S_3, S_4 соответственно. Верно ли, что $S_1S_3=S_2S_4$?

7. Остается ли это соотношение справедливым

а) для невыпуклого несамопересекающегося четырехугольника;

б) для самопересекающегося четырехугольника?

8. Обобщить это соотношение на случай, когда точка O — произвольная внутренняя точка выпуклого четырехугольника.

9. Справедливо ли соотношение, полученное в предыдущей задаче, если точка O лежит вне выпуклого четырехугольника?

10. Обобщить это соотношение на случай выпуклого $2n$-угольника ($n\geqslant 2$) и произвольной точки O в его плоскости.

* *
*

Многие поступающие начинают решение уравнения или неравенства с нахождения *области допустимых значений* (ОДЗ), т. е. множества чисел, для которых определены одновременно левая и правая части этого уравнения или неравенства. Однако следует иметь в виду, что находить ОДЗ нужно далеко не во всех случаях.

Например, если в процессе решения используются равносильные преобразования, то отыскание ОДЗ представляет собой напрасную трату времени.

Пример 3 (МИНХ и ГП, 1974). *Решить неравенство*

$$\log_2\log_3\frac{x+2}{x-2}<\log_{1/2}\log_{1/3}\frac{x-2}{x+2}. \qquad (4)$$

Нахождение ОДЗ требует здесь решения системы неравенств

$$\left|\begin{array}{l} x\neq 2,\\ \dfrac{x+2}{x-2}>0,\\ \log_3\dfrac{x+2}{x-2}>0,\\ x\neq -2,\\ \dfrac{x-2}{x+2}>0,\\ \log_{1/3}\dfrac{x-2}{x+2}>0, \end{array}\right.$$

что является довольно трудоемкой задачей. Между тем находить ОДЗ нет необходимости, поскольку от неравенства (4) мы можем последовательно переходить к равносильным неравенствам:

$$\log_2\log_3\frac{x+2}{x-2}<-\log_2\log_3\frac{x+2}{x-2};$$

$$\log_2\log_3\frac{x+2}{x-2}<0;$$

$$0<\log_3\frac{x+2}{x-2}<1;$$

$$1<\frac{x+2}{x-2}<3,\qquad 1<1+\frac{4}{x-2}<3,$$

$$0<\frac{2}{x-2}<1,\qquad \frac{x-2}{2}>1,$$

откуда получаем решение: $x>4$.

Весьма часто нахождение ОДЗ оказывается излишним при решении иррациональных уравнений. Так, возводя в квадрат обе части уравнения

$$\sqrt{f(x)}=g(x), \qquad (5)$$

мы приходим к уравнению

$$f(x)=[g(x)]^2, \qquad (6)$$

следствием которого является неравенство $f(x)\geqslant 0$. Поэтому корни уравнения (6) всегда входят в ОДЗ уравнения (5).

Пример 4 (МГУ, физфак, 1968). *Для каждого значения параметра a найти все решения уравнения*

$$\sqrt{a(2^x-2)+1}=1-2^x.$$

Нахождение ОДЗ потребовало бы здесь решения неравенства с параметром $a(2^x-2)+1\geqslant 0$, однако без этого можно вполне обойтись. Полагая $t=2^x$, перепишем данное уравнение в виде

$$\sqrt{at-2a+1}=1-t. \qquad (7)$$

После возведения обеих частей уравнения (7) в квадрат получим

$$at-2a+1=(1-t)^2, \qquad (8)$$

откуда $t_1=a$, $t_2=2$. Для найденных корней незачем проверять справедливость неравенства $at-2a+1\geqslant 0$ — оно является следствием уравнения (8). Нужно лишь проверить выполнение условия $1-t\geqslant 0$, которое обеспечивает равносильность уравнений (7) и (8), и условия $t>0$, вытекающего из равенства $t=2^x$; оба эти условия проверяются без труда.

Ответ: при $a\leqslant 0$ и при $a>1$ решений нет; при $0<a\leqslant 1$ имеется единственное решение $x=\log_2 a$.

Часто при решении уравнений и неравенств ОДЗ можно находить «не до конца», накладывая необходимые ограничения не непосредственно на неизвестное, а на какие-либо выражения от неизвестного.

Пример 5 (ЛГУ, матмех, 1966). *Решить уравнение*

$$\operatorname{tg}\frac{2\pi x}{1+x+x^2}=\sqrt{3}.$$

«Примерный» абитуриент, начав с нахождения ОДЗ, столкнется с необходимостью решать совокупность уравнений

$$\frac{2\pi x}{1+x+x^2}=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

$(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$ для определения «запрещенных» значений неизвестного. Между тем достаточно лишь знать, что ОДЗ описывается условиями

$$\frac{2\pi x}{1+x+x^2}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \qquad (9)$$

$(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$. В самом деле, исходное уравнение немедленно сводится к совокупности уравнений

$$\frac{2\pi x}{1+x+x^2}=\frac{\pi}{3}+n\pi$$

$(n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$, корни которых, конечно, удовлетворяют условиям (9).

На приведенных примерах можно убедиться, что фактическое вычисление ОДЗ отнюдь не является обязательным элементом решения уравнений и неравенств — проводить такое вычисление следует лишь тогда, когда это действительно необходимо.

Упражнения

11 (МГУ, ВМК, 1973). Решить неравенство

$$\log_{\frac{x^2-10x+31}{30}}\left(5x-\frac{11}{20}\right)\leqslant 0.$$

12 (МГУ, мехмат, 1974). Решить уравнение $\sqrt{2\sin 2x}+2\sin x=0$.

13 (МГУ, экономический факультет, 1974). Найти все решения уравнения

$$\log_{\cos 2x-\sin 2x}(1-\cos x-\sin x)=1.$$

Ю. Ионин (Ленинград)

* * *

Интересное предложение высказал в своем письме *П. Горнштейн* (Киев): публиковать на страницах журнала красивые, короткие и «нестандартные» решения задач конкурсных экзаменов. В самом деле, часто, например, в геометрических задачах поступающие добираются до результата после проведения длинных и громоздких вычислений. Однако иногда решение той же задачи удается свести буквально к нескольким строчкам, если найти «изюминку» — догадаться применить некоторую геометрическую теорему или сделать удачное дополнительное построение.

Автор письма приводит несколько примеров таких задач, взятых из вариантов вступительных экзаменов в МГУ. Решить их можно и без «геометрической фантазии», хотя тогда к цели ведет довольно извилистый путь со сложными вычислениями (см. Б. И. Александров и М. В. Лурье, «Пособие по математике для поступающих в МГУ», издательство МГУ, 1974 г.). Предлагаем читателям журнала попытаться найти короткие геометрические решения следующих задач.

14 (МГУ, физфак, 1972). В треугольнике ABC угол B равен $\pi/4$, угол C равен $\pi/3$. На медианах BM и CN как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках P и Q. Хорда PQ пересекает среднюю линию MN в точке F. Найти отношение длины отрезка NF к длине отрезка FM.

15 (МГУ, физфак, 1973). Боковые грани треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S образуют одинаковые двугранные углы с плоскостью основания ABC пирамиды; SO — высота пирамиды. Известно, что $\angle ASB = 7\pi/12$, $\angle BSC = \pi/2$, $\angle SCA = \pi/3$. Найти отношение площади треугольника AOB к площади треугольника ABC.

16 (МГУ, геофак, 1971). В треугольнике ABC со сторонами $AB = 3$, $BC = 4$, $AC = 5$ проведена биссектриса BD. В треугольники ABD и BCD вписаны окружности, которые касаются отрезка BD в точках M и N соответственно. Определить длину отрезка MN.

* * *

В редакционной почте есть еще несколько писем, в которых читатели журнала предлагают простые и остроумные решения конкурсных задач.

Пример 6 (МФТИ, 1970). *Пассажир метро спускается вниз по движущемуся эскалатору за 24 сек. Если пассажир идет с той же скоростью, но по неподвижному эскалатору, то он спускается за 42 сек. За сколько секунд он спустится, стоя на ступеньках движущегося эскалатора?*

Если обозначить длину эскалатора через l, а скорость эскалатора и пассажира через v_1 и v_2, то нетрудно составить систему двух уравнений с тремя неизвестными, из которой определяется искомое отношение l/v_1 (см. «Квант», 1971, № 5, с. 46—47).

Ученик 7 класса *Д. Феофанов* (Алма-Ата) предлагает арифметическое решение задачи. При одновременном движении пассажира и эскалатора пассажир спускается за 1 *сек* на 1/24 часть длины эскалатора. Но за 1 *сек* сам пассажир спускается по неподвижному эскалатору на 1/42 часть его длины. Следовательно, ступенька эскалатора за 1 *сек* проходит $\frac{1}{24}-\frac{1}{42}=\frac{1}{56}$ часть длины эскалатора, а потому всю его длину она пройдет за 56 *сек*.

* * *

В контрольной работе телевизионных курсов для поступающих в вузы была помещена следующая задача (см. «Квант», 1973, № 1, с. 55; № 2, с. 80).

Пример 7. *Найти* $\sin 2\alpha$, *если известно, что*

$$3\,\mathrm{tg}^2\alpha - 10\,\mathrm{tg}\,\alpha + 3 = 0$$

и что угол α *удовлетворяет неравенствам*

$$\frac{5}{4}\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi.$$

Любопытное решение этой задачи прислала в редакцию учащаяся ГПТУ *Т. Антипова* (Москва). Перепишем данное в условии равенство в виде

$$10\ \mathrm{tg}\,\alpha = 3\ (\mathrm{tg}^2\alpha + 1).$$

Так как $\mathrm{tg}^2\alpha + 1 \neq 0$, то отсюда получаем, что

$$\frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{3}{5}.$$

Если вспомнить выражение синуса через тангенс половинного аргумента

$$\sin x = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}},$$

то немедленно находим ответ: $\sin 2\alpha = {}^3/_5$. Отметим, что условие $5\pi/4 < \alpha < 3\pi/2$ оказывается лишним.

Обзор подготовили Н. Розов и В. Степанова

Ленинградский государственный университет

им. А. А. Жданова

О Ленинградском государственном университете было рассказано в «Кванте» № 6 за 1975 и 1976 годы. В этом номере мы приводим варианты письменного вступительного экзамена по математике на различных факультетах ЛГУ в 1975 году.

Математико-механический факультет и факультет прикладной математики — процессов управления

1. По окончании первого цикла работ имеется a литров воды, содержащей p % вредных веществ. Через каждый час работ второго цикла количество воды уменьшается на b литров, а концентрация вредных веществ увеличивается на q %. Когда нужно закончить второй цикл работ, чтобы при сливе оставшейся воды можно было уничтожить наибольшее количество вредных веществ?

2. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[3]{x+b}=1$$

при всех значениях параметров a и b.

3. Решить уравнение

$$4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=(3a-\sin 2x)^2$$

при всех значениях параметра a.

4. Через середину хорды круга длины a проведена другая хорда длины b. Определить длины отрезков, на которые хорда b делится хордой a.

5. На окружности полукруга радиуса R даны точки A и B. Если N — один из концов диаметра, а O — центр окружности, то

$$\angle AON=\alpha,\quad \angle BON=\beta\ \left(0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}\right).$$

Определить площадь полной поверхности тела, образованного вращением кругового сектора AOB вокруг диаметра.

Химический и психологический факультеты и экономический факультет (кроме отделения политэкономии)

1. В лаборатории имелось два одинаковых ящика порошка, содержащего p % висмута. Из каждого ящика израсходовали по 2 *кг* порошка, а затем добавили столько же нового порошка, причем в первый ящик добавили порошок, содержащий q % висмута, а во второй — $3q$ % висмута. В результате во втором ящике оказалось в 1,5 раза больше висмута, чем в первом. Сколько висмута было сначала в каждом из ящиков?

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}(4y^2-y+6)\cdot 2^x=20y,\\ x+\log_2 y=2.\end{cases}$$

3. Решить уравнение

$$\log_3\cos 2x-2\log_3\operatorname{tg}x=1+\log_3(\sin x+\cos x)+\log_3(\cos x-\sin x).$$

4. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна c и в три раза больше высоты, проведенной из вершины прямого угла. Найти катеты.

5. Тупоугольный равнобедренный треугольник вращается около оси, проходящей через точку пересечения его высот параллельно большей стороне. Определить объем тела вращения, если тупой угол равен α, а противоположная сторона равна a.

Биолого-почвенный и географический факультеты

1. Бригада лесорубов должна была заготовить 400 $м^3$ дров. Эту работу лесорубы выполнили на 3 дня раньше, так как ежедневно заготовляли на 30 $м^3$ дров больше, чем планировалось. Сколько дров заготовляла бригада ежедневно?

2. (Только для биолого-почвенного факультета). Решить неравенство

$$5\sqrt{x}+\frac{5}{2\sqrt{x}}\leqslant 2x+\frac{1}{2x}+4.$$

2а. (Только для географического факультета). Решить уравнение

$$5x+\frac{5}{2x}=2x^2+\frac{1}{2x^2}+4.$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}x+y=2y\cdot\log_x y,\\ x^{\operatorname{tg}y}=1.\end{cases}$$

4. (Только для биолого-почвенного факультета). По сторонам треугольника a и b и медиане m_c определить остальные медианы.

4а. (Только для географического факультета). Прямоугольный сектор радиуса R разделен на две части дугой круга того же радиуса с центром в одном конце дуги сектора. Определить радиус круга, вписанного в бóльшую из этих частей.

5. В трехгранном угле каждый из плоских углов при вершине равен α. Как удалена от его вершины точка, которая находится внутри угла на расстоянии a от каждой грани?

Геологический факультет и отделение политэкономии экономического факультета

1. Танкер заполняется нефтью с помощью 5 труб. Если производительность каждой трубы уменьшить на 8 $м^3/мин$, а число труб увеличить на 2, то время заполнения танкера не изменится. Определить первоначальную производительность труб.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x + y = 7, \\ \log_2 \dfrac{y}{3} = 2 - x. \end{cases}$$

3. Решить уравнение

$$\sin 2x = \sin x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right).$$

4. Найти множество точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $|3 - x| \geq y^2 - 1$.

5. Грани некоторого параллелепипеда есть ромбы, равные между собой и расположенные так, что встречаются вместе три острых плоских угла. Определить объем этого параллелепипеда, если сторона ромба равна a, а острый угол α.

Физический факультет

1. Пловец переправляется через реку с параллельными берегами, ширина реки равна L. Скорость пловца в стоячей воде равна v. Скорость течения реки предполагается постоянной во всех точках реки и равной u, причем $u > v$. Под каким постоянным углом α с нормалью к берегу пловцу следует направлять свою скорость, чтобы течение его меньше всего снесло?

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} u + v = 3, \\ u^5 + v^5 = 33. \end{cases}$$

3. Решить уравнение

$$\sqrt{x}\sqrt{1 - \sin x - \cos x} + \sqrt{\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)} = \operatorname{ctg}\frac{x}{4}.$$

4. При каких значениях параметра a все пары чисел (x, y), удовлетворяющие неравенству $y > 5(x-a)^2 - \sqrt{9-a^2}$, одновременно удовлетворяют и неравенству $y > x^2 - 3$?

5. Шар с центром в центре куба касается его ребер. Какую часть объема куба составляет его общая часть с шаром?

И. Молотков, В. Осипов,
С. Славянов, П. Товстик

Новосибирский государственный университет

В этом номере мы помещаем образцы вариантов письменного экзамена по физике на физическом факультете НГУ в 1975 году.

На экзамене по физике каждому абитуриенту предлагалось 6 задач, из которых одна качественная — объяснить физическое явление, показанное экзаменатором на демонстрационном столе. На решение всех задач отводилось 5 часов.

Решения всех задач (кроме первой) оценивались в баллах, в зависимости от степени сложности задачи (за неполное решение задачи ставилась часть баллов). Максимальные баллы следующие: за задачу № 2 — 3 балла, № 3 — 4 балла, № 4 — 5 баллов, № 5 — 7 баллов, № 6 — 9 баллов. Для получения положительной оценки нужно было набрать не меньше 4-х баллов. Оценка «отлично» ставилась при 19—21 баллах и выше.

В приводимых ниже вариантах после формулировки каждой задачи в скобках указана доля (в процентах) правильных решений этой задачи. Первое число — процент правильных решений среди зачисленных в университет, второе — среди незачисленных и третье число — средний процент. При вычислении процентов задача считалась решенной, если за нее поставлено не меньше половины максимального балла.

Вариант 1

1. Свет, пройдя стопку плоских тонких стеклянных пластин, погруженных в воду, создает на стенке — экране изображение букв: НГУ. В отсутствие воды изображение исчезает. Объяснить эффект.

2. В цилиндре с площадью поперечного сечения S на высоте h от дна находится поршень массы M, поддерживаемый сжатым газом с молярной массой μ. Температура газа в цилиндре T, атмосферное давление p. Определить массу m газа в цилиндре. Трение

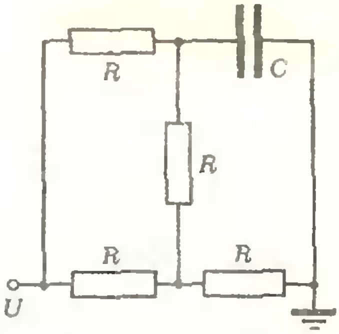


Рис. 1.

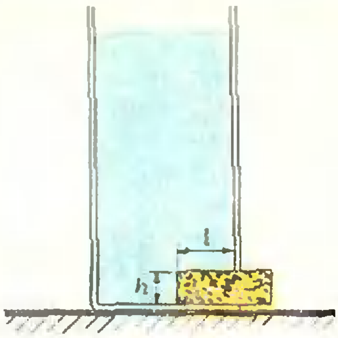


Рис. 2.

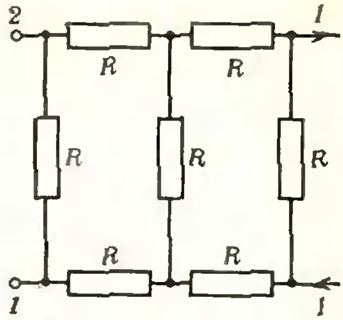


Рис. 3.

отсутствует. Ускорение свободного падения g. (88, 44, 69)

3. Конденсатор емкости C включен в цепь, как показано на рисунке 1. Найти установившийся заряд конденсатора. (69, 35, 55)

4. На очень длинном стержне находятся три маленькие бусинки массы m с зарядом q каждая. Расстояние между первой и второй и между второй и третьей бусинками равно a. Какую скорость будут иметь бусинки на очень большом расстоянии друг от друга, если их отпустить? Трение отсутствует. (53, 13, 36)

5. В прямоугольный очень высокий сосуд налита жидкость плотности ρ. В одной из стенок у дна сосуда имеется прямоугольное отверстие высоты h, куда вдвинута на расстояние l невесомая пробка того же сечения (рис. 2). Между пробкой и дном сосуда жидкость не проникает. Коэффициент трения пробки о дно сосуда равен k. Трение пробки о края сосуда пренебрежимо мало. При каком уровне жидкости над пробкой жидкость не сможет вытолкнуть пробку? Атмосферное давление p. (66, 26, 49)

6. На горизонтальной гладкой плоскости в начальный момент покоится прямоугольная рамка массы M с длинной стороной, равной a. Со скоростью v вдоль этой стороны движется упругий шарик массы m. В дальнейшем шарик движется, ударяясь о середины коротких сторон рамки. Найти время между двумя последовательными ударами шарика об одну и ту же короткую сторону. Размерами шарика пренебречь. (53, 0, 31)

Вариант 2

1. В замкнутом сосуде, частично заполненном водой, плавает игрушка — «водолаз». В сосуд вставлена трубка. Если в трубку подуть, «водолаз» тонет. При освобождении трубки возникает два варианта: иногда «водолаз» всплывает, а иногда так и остается под водой. Объяснить поведение игрушки.

2. На рисунке 3 изображена электрическая схема, в которую втекает и вытекает ток I, как показано на рисунке. Найти напряжение U между точками 1 и 2. (81, 8, 49)

3. В вертикальную стенку вбиты два гвоздя A и B, на которые сверху опирается стоящий у стены обруч веса P с центром в точке O (рис. 4). Найти силы, действующие на каждый из гвоздей, если радиусы OA и OB составляют с вертикалью углы α и β соответственно. Трение отсутствует. (87, 29, 62)

4. Утка летела по горизонтальной прямой AB с постоянной скоростью u. В нее бросил камень неопытный «охотник», причем бросок был сделан без упреждения, т. е. в момент броска направление скорости камня (угол α к горизонту) было как раз на утку (рис. 5). Величина начальной скорости камня равна v. На какой высоте h летела утка, если камень все же попал в нее? Ускорение свободного падения g. Сопротивлением воз-

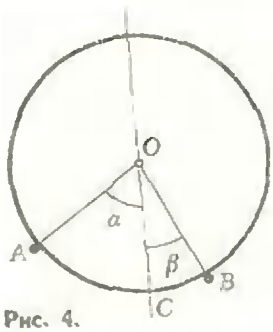


Рис. 4.

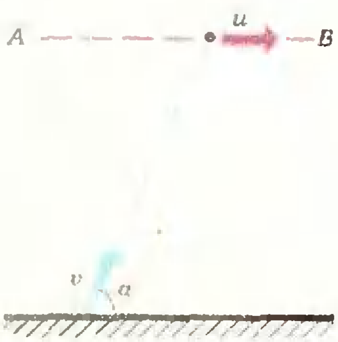


Рис. 5.

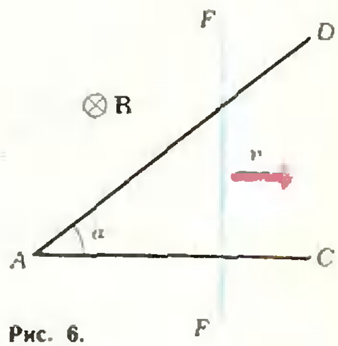


Рис. 6.

духа, размером утки и ростом «охотника» пренебречь. (81, 12, 51)

5. В длинной трубке между двумя поршнями (масса каждого из них равна m) находится идеальный газ, а вне поршней — вакуум. В начальный момент правый поршень имеет скорость v, а левый — в три раза большую, причем направлены они в одну сторону. Температура газа в начальный момент равна T_0. Найти максимальную температуру газа, если стенки трубки и поршни теплонепроницаемы. Внутренняя энергия газа пропорциональна абсолютной температуре ($U = cT$). Трение отсутствует. (78, 8, 44)

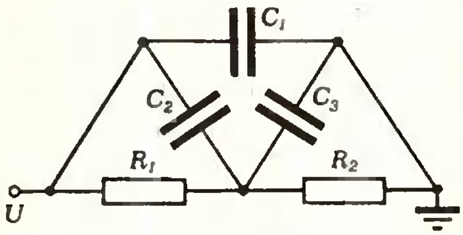


Рис. 7.

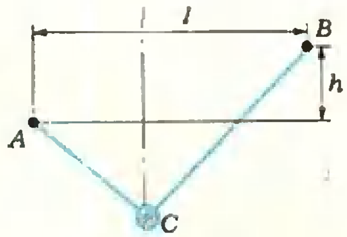


Рис. 8.

6. Металлический прут EF (сопротивление единицы его длины равно r) движется с постоянной скоростью v, замыкая два идеальных проводника AC и AD, образующих угол α (рис. 6). Длина AC равна l и $EF \perp AC$. Вся система находится в однородном постоянном магнитном поле B, перпендикулярном плоскости системы. Найти полное количество тепла, которое выделится в цепи за время движения прута от точки A до точки C. (65, 8, 40)

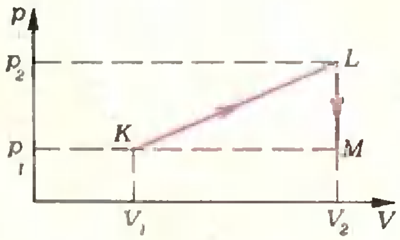


Рис. 9.

Вариант 3

1. Пламя горелки коптит. Если поднести сверху вертикальную стеклянную трубку, копоть пропадает, однако появляется снова, если закрыть трубку сверху. Объяснить явление.

2. На дне моря (глубина H) стоит бак (куб с ребром h), заполненный водой. Какую минимальную работу A надо совершить, чтобы выкачать воду из бака? Плотность воды ρ. Ускорение свободного падения g. (39, 37, 38)

3. Конденсаторы с емкостями C_1, C_2 и C_3 включены в цепь, как показано на рисунке 7. Найти установившиеся заряды конденсаторов. (78, 58, 69)

4. Концы нерастяжимой невесомой нити длины L закреплены в точках A и B, находящихся на разных уровнях, как показано на рисунке 8. На нить надета тяжелая бусинка C. Пренебрегая размером бусинки и трением, найти расстояние от точки A до вертикали, проходящей через бусинку. (64, 21, 44)

5. Один моль газа участвует в процессе, график которого представлен на рисунке 9, проходя последовательно состояния K, L, M. Внутренняя энергия газа пропорциональна абсолютной температуре ($U = cT$). Найти поглощенное газом в процессе KLM тепло. (36, 16, 27)

6. В тонкостенной непроводящей равномерно заряженной зарядом Q сфере радиуса R и массы M имеются два небольших диаметрально противоположных отверстия. В начальный момент сфера покоится. По прямой, соединяющей отверстия, из бесконечности начинает двигаться со скоростью v частица массы m с зарядом q, одноименным с Q. Найти время, в течение которого заряд q будет находиться внутри сферы. (36, 0, 19)

Г. Меледин

Новые книги

В этом году мы продолжаем публикацию аннотаций на книги по математике и физике, издающиеся в 1976 году, которые могут быть интересны нашим читателям. По многочисленным просьбам читателей мы будем также публиковать аннотации на некоторые книги издательств «Молодая гвардия», «Детская литература» и «Знание».

В этом номере мы расскажем о книгах, выходящих в первом квартале 1976 года.

Большинство этих книг можно приобрести через специализированные магазины «Книга почтой».

Математика

Издательство «Наука»

1. Пойа Д. *Математическое открытие.* Перевод с англ. Издание 2-е. Объем 31 л., тираж 50 000 экз., цена 1 р. 64 к.

Имя выдающегося математика и педагога Д. Пойа хорошо известно по его многочисленным научным работам. Однако наибольшей популярностью в среде любителей математики пользуются его двухтомные «Задачи и теоремы из анализа», а также книги «Как решить задачу?» и переизданная в 1975 году «Математика и правдоподобные рассуждения»; в математической литературе книг, равных ей по точности анализа и увлекательности изложения, найти нелегко.

Такой же характер имеет и книга «Математическое открытие». «Математическим открытием» Д. Пойа называет получение любого (сколь угодно скромного!) результата, например, просто решение задачи. Рассматриваемые в этой книге задачи редко требуют знаний, выходящих за пределы программы средней школы, но по своей трудности они зачастую превышают школьный уровень. Для некоторых задач дается их полное решение (хотя и в сжатом виде), для других намечается только несколько первых шагов, а иногда указывается только конечный результат.

2. Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я. *Элементарное введение в теорию вероятностей.* Издание 8-е, исправленное. Объем 8 л., тираж 100 000 экз., цена 27 к.

Роль теоретико-вероятностных методов в самых различных областях знания с каждым годом все увеличивается. Книга Гнеденко и Хинчина отличается от других книг по теории вероятностей тем, что она предъявляет минимальные требования к математическим знаниям читателей — школьного курса вполне достаточно для свободного понимания всех ее разделов.

Издательство «Просвещение»

3. Виленкин Н. Я. *Индукция. Комбинаторика.* Объем 3 л., тираж 300 000 экз., цена 10 к.

В настоящее время в курс математики средней школы вводятся вопросы, связанные с методами математической индукции и с комбинаторикой. Переход школьного курса математики на теоретико-множественные основы требует нового изложения и этих разделов. Такое изложение и дается в брошюре. Рассмотрение метода математической индукции основывается на системе аксиом Пеано; рассказывается о дедуктивном и индуктивном методах доказательства, разбирается большое количество интересных примеров на применение математической индукции для доказательства тождеств и неравенств. В разделе, посвященном комбинаторике, приводится подсчет числа подмножеств данной мощности и числа отображений данного вида (например, выясняется, сколько существует монотонных отображений, т. е. отображений, сохраняющих порядок; подсчитывается, сколько существует разных отображений одного множества в другое и т. д.). Выводится формула для числа размещений с повторениями; даются приложения комбинаторики к теории вероятностей.

Книга, безусловно, будет полезна всем старшеклассникам, особенно учащимся девятых классов, а также учителям математики и руководителям математических кружков.

Издательство «Мир»

4. Эббот Э. Э. *Флатландия.* Перевод с англ. Бюргер Д. *Сферландия.* Перевод с голл. Объем 16 л., тираж 50 000 экз., цена 1 р. 04 к.

Серия переводов мало известных советскому читателю книг зарубежных авторов по занимательной математике, которую открыли три книги М. Гарднера (*«Математические головоломки и размышления», «Математические досуги» и «Математические новеллы»*), получила оживленные отклики. В этой серии уже вышло 8 книг. В 1976 году она пополнится еще одной книгой.

Эта книга объединяет два произведения, написанных в разное время и разными людьми: «Флатландия» написана в 1880 году английским педагогом Эдвином Э. Эбботом, а «Сферландия» — в 1957 году голландским математиком Дионисом Бюргером, который продолжил и развил затронутую Эбботом тематику.

Авторы «Флатландии» («Романа о четвертом измерении с иллюстрациями Квадрата») и «Сферландии» («Романа об искривленном пространстве и расширяющейся Вселенной с иллюстрациями Шестиугольника») избрали не совсем обычный путь «постижения» геометрии. И Эббот, и Бюргер как бы ставят себе цель: учить математике так, как узнают мир дети — в игре. Об этих книгах можно сказать, что это — по-настоящему хорошая научная фантастика; их можно поставить где-то между произведениями Льюиса Кэррола и «Гулливером» Джонатана Свифта.

Мир, в котором живет Квадрат, населен двумерными существами. Их представление о «пространстве» — это, по-существу, евклидова геометрия на плоскости. И идеи Квадрата о возможности существования третьего, и даже четвертого измерений кажутся его «современникам» столь бредовыми и опасными, что они сажают Квадрата в тюрьму.

Мир Шестиугольника гораздо сложнее, чем мир его «деда» — это сфера. «Геометрия» сферландцев — это опять-таки геометрия двух измерений (но уже на сфере), однако Бюргер подводит читателя к представлению о трехмерном пространстве, геометрия которого может не быть евклидовой.

Написанные с мягким юмором, книги Эббота и Бюргера пользуются заслуженным успехом у себя на родине. Мы надеемся, что они заинтересуют и наших читателей.

5. Т р и г г Ч. *Задачи с изюминкой.* (Задачи и олимпиады.) Объем 16 л., тираж 50 000 экз., цена 87 к.

Этой книгой Ч. Тригга, американского математика и педагога, открывается новая серия книг издательства «Мир» — «Задачи и олимпиады», которая будет включать задачи, предлагавшиеся на математических олимпиадах разных стран. Задачи, собранные в книге Тригга, были опубликованы в различных, иногда серьезных математических журналах. Формулируются они довольно сложно, но, как правило, допускают простые, изящные и оригинальные решения. Среди авторов таких решений — известные американские математики.

Большинство задач вполне по силам школьникам старших классов.

Физика

Издательство «Наука»

1. К о г а н Б. Ю. *Сто задач по электричеству.* Объем 5 л., тираж 200 000 экз., цена 14 коп.

Этот сборник задач выпускается в серии «Библиотечка физико-математической школы». Он состоит из ста нестандартных задач по электричеству, носящих занимательный характер. Ко всем задачам даны подробные решения.

Книга рассчитана на учащихся 9—10 классов.

2. П е р е л ь м а н Я. И. *Занимательная физика.* Книга 1. Издание 19-е. Объем 12 л., тираж 400 000 экз., цена 46 коп.

3. П е р е л ь м а н Я. И. *Занимательная физика.* Книга 2. Издание 19-е. Объем 15 л., тираж 400 000 экз., цена 53 коп.

Эти книги написаны известным популяризатором науки. Задача книги не столько сообщить читателю новые знания, сколько помочь ему оживить уже имеющиеся. Несмотря на то, что книга написана давно, она «устарела» лишь в очень незначительной степени.

Рассчитана на интересующихся физикой учащихся средней школы и лиц, занимающихся самообразованием.

4. К о м п а н е е ц А. С. *Законы физической статистики. Ударные волны. Сверхплотное вещество.* Издание 2-е. Объем 15 л., тираж 40 000 экз., цена 50 коп.

Научно-популярные статьи об основных законах и некоторых важных приложениях статистической физики написаны выдающимся советским физиком-теоретиком проф. А. С. Компанейцем. В популярной и вместе с тем строго научной форме автор рассказывает о статистической физике, об основных законах, управляющих физическими системами из многих частиц, о важных для практики специальных вопросах. Для понимания книги не требуется специальных знаний, но читать ее надо внимательно и вдумчиво.

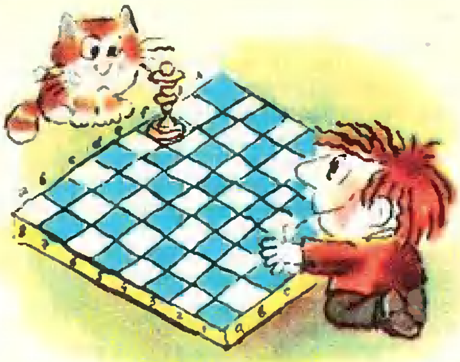
Сборник рассчитан на школьников старших классов.

5. Ш к л о в с к и й И. С. *Вселенная, жизнь, разум.* Издание 4-е. Объем 22 л., тираж 150 000 экз., цена 1 р. 10 к.

Это — новое издание известной книги, посвященной увлекательной проблеме возможности разумной жизни на других планетных системах. Вместе с тем книга содержит достаточно полное и доступное изложение результатов современной астрофизики. Автор книги — известный советский астрофизик — включил в нее ряд оригинальных идей и гипотез. Отдельная глава посвящена советско-американской конференции в Бюракане, обсуждавшей вопросы связи с внеземными цивилизациями.

Книга рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся успехами современного естествознания.

И. Клумова,
М. Смолянский



Задачи

1. На шахматной доске на поле f8 стоит ферзь. Двое по очереди передвигают ферзя либо на несколько клеток вниз, либо на несколько клеток влево, либо на несколько клеток влево — вниз по диагонали. Выигрывает тот, кто загонит ферзя в левый нижний угол — на поле a1. Известно, что в этой игре начинающий, если он играет правильно, всегда выигрывает, как бы хорошо ни играл его партнер. Как же должен играть начинающий, чтобы выиграть? Сколько ходов ему понадобится?

А кто выигрывает при правильной игре — начинающий или его противник, если вначале ферзь стоит на поле e8?

2. На дачном участке летом стояла палатка. Когда начались морозы, палатку сняли, а участок решили перекопать. Оказалось, что сухая земля непосредственно под палаткой успела промерзнуть сильнее, чем окружающая более влажная земля. Как это объяснить?

3. В классе 35 учеников. Из них 20 занимаются в математическом кружке, 11 — в кружке «умелые руки», 10 ребят не ходят в эти кружки. Сколько «математиков» занимаются в «умелых руках»?

4. Расположите на плоскости одиннадцать одинаковых квадратов, не налегающих друг на друга, так, чтобы выполнялось следующее условие: как бы ни покрасить эти квадраты тремя красками, обязательно какие-нибудь два квадрата одного цвета будут иметь общий участок границы.

Л. Фладе

Необходимо или достаточно?

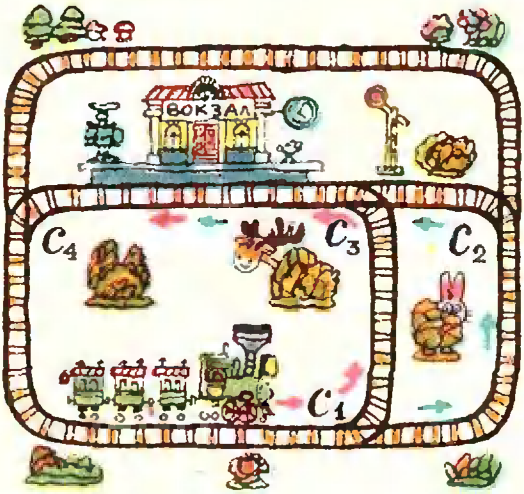


Рис. 1.

Франк давно уже мечтал о собственной железной дороге. И вот в день рождения на столе были разложены рельсы, стрелки, реостат и электровоз с четырьмя вагонами. Был и домик с вывеской «Вокзал». После уроков Франк пригласил в гости своего приятеля Мишу. Сначала ребята построили путь, изображенный на рисунке 1. Франк регулировал скорость поезда с помощью реостата и переводил стрелку № 1 (C_1). Миша переводил остальные стрелки. Ребята заметили, что если стрелка C_1 поставлена в положение «налево» (по ходу поезда), то поезд не может миновать вокзала (красные стрелки на рисунке 1). Такую зависимость можно сформулировать в виде «если — то»:

(1) *если стрелка C_1 поставлена в положение «налево», то поезд приходит к вокзалу.*

Или иначе:

(2) *всегда, если C_1 поставлена «налево», то поезд приходит к вокзалу;*

(3) *положения C_1 «налево» достаточно, чтобы поезд пришел к вокзалу.*

Рис. 2.

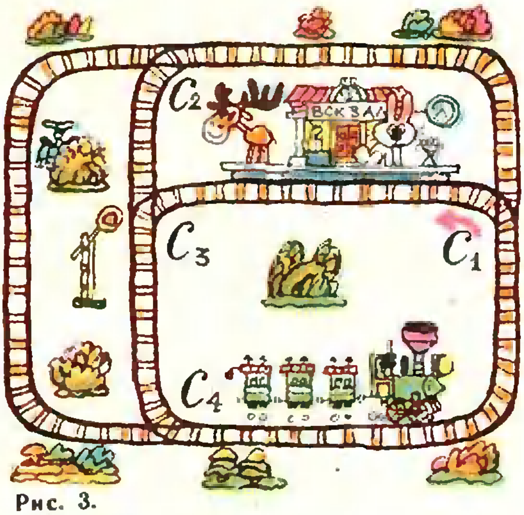


Рис. 3.

---

*) L. Flade. «Notwendig oder hinreichend — das ist hier die Frage». Журнал «Альфа» (ГДР), 1975, № 2. Перевод и обработка А. Халамайзера.

Посмотрим, **необходимо** ли такое положение C_1, чтобы поезд пришел к вокзалу? Оказывается, это **не необходимо**: при положении C_1 «прямо», а C_2 «налево» поезд также придет к вокзалу (синие стрелки на рисунке 1).

Переставив отрезок рельсов между стрелками C_2 и C_3 так, как показано на рисунке 2, ребята заметили, что теперь уже положения C_1 «налево» **не достаточно** для того, чтобы поезд пришел к вокзалу (красные стрелки на рисунке 2). В самом деле, если стрелка C_1 установлена «налево», а C_2 «прямо», то поезд не попадет к вокзалу; положение же обеих стрелок C_1 и C_2 «налево» приведет поезд к вокзалу. Ну, а если C_1 стоит «прямо», то независимо от положения C_2 поезд к вокзалу не придет. Значит, положение C_1 «налево» **необходимо**, чтобы поезд пришел к вокзалу; поезд не может придти к вокзалу, если C_1 не стоит «налево». Итак,

(4) *только, если C_1 стоит «налево», поезд может придти к вокзалу*,

или иначе:

(5) *поезд приходит к вокзалу только тогда, когда C_1 поставлена в положение «налево».*

Тот же смысл имеет предложение

(6) *если поезд приходит к вокзалу, то C_1 стоит в положении «налево».*

В школе на уроках математики вы выяснили, что оборот «если — то» связывает условие и заключение теоремы, предложения, высказывания. Посмотрим, что является условием и что — заключением в высказываниях (4), (5), (6). Вероятно, вы заметили, что во всех трех высказываниях условия совпадают: *поезд приходит к вокзалу*. Заключением во всех трех высказываниях будет *C_1 стоит в положении «налево»*

Задача 1. Укажите условие в следующих высказываниях.

а) *Если натуральное число делится на 5, то оно делится и на 10.*

б) *Если натуральное число делится на 10, то оно делится и на 5.*

в) *Треугольник ABC только тогда является равносторонним, когда он остроугольный.*

г) *Если ромб имеет прямой угол, то он является квадратом.*

д) *Число делится на 6 только тогда, когда оно делится на 3.*

Задача 2. Заполните пропуски словами «достаточно» или «необходимо», чтобы получились верные высказывания.

а) *Делимость натурального числа на 4. . . . . . . для того, чтобы это число делилось на 8.*

б) *Делимость натурального числа на 8. . . . . . . для того, чтобы это число делилось на 4.*

в) *Свойство треугольника быть остроугольным. . . . . . . для того, чтобы он был равносторонним.*

г) $a < 2$ и $b < 15$. . . . . . . *для того, чтобы было* $a + b < 17$.

д) $a \cdot b = 0$. . . . . . . *для того, чтобы было* $a = 0$ и $b = 0$.

е) $s > 3^3$ и $7 < p < 10$. . . . . . . *для того, чтобы было* $s \cdot p > 3^4$.

Вернемся к нашей железной дороге и рассмотрим схему путей, изображенную на рисунке 3. Выясним, **достаточным** или **необходимым** является положение C_1 «налево» для прихода поезда к вокзалу. Очевидно, здесь положения C_1 «налево» достаточно, чтобы поезд пришел к вокзалу. Или, иначе, высказывание

(7) *если C_1 установлена «налево», то поезд приходит к вокзалу* — верное.

А является ли положение C_1 «налево» в схеме на рисунке 3 **необходимым** условием прихода поезда к вокзалу? Да, конечно, потому что высказывание

(8) *поезд приходит к вокзалу только если C_1 установлена «налево»* — верное.

Итак, в схеме путей, изображенной на рисунке 3, положение C_1 «налево» **необходимо** и в то же время **достаточно**, чтобы поезд пришел к вокзалу. Такая зависимость может быть выражена словами «тогда и только тогда»:

(9) *поезд приходит к вокзалу тогда и только тогда, когда C_1 установлена «налево».*

Вообще, чтобы убедиться, что «A верно тогда и только тогда, когда верно B», нужно убедиться в том, что условие B является и необходимым, и достаточным для заключения A. Если же выполнения условия B достаточно, но не необходимо, или необходимо, но не достаточно, то выражение, содержащее слова «тогда и только тогда», оказывается неверным (ложным).

Задача 3. Какие из следующих высказываний верны:

а) *Треугольник является равнобедренным тогда и только тогда, когда он равносторонний.*

б) *Натуральное число делится на* 3^2 *тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на* $4^2—7$.

в) $x < 4$ *необходимо и достаточно для того, чтобы было* $2x < 2^3$.

г) *Диагонали четырехугольника ABCD взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда ABCD — дельтоид* (*дельтоидом* или *ромбоидом* называется выпуклый четырехугольник, имеющий ровно одну ось симметрии, являющуюся его диагональю).

д) *Два параллелограмма имеют одинаковую площадь тогда и только тогда, когда у них совпадают соответственно длины оснований и длины высот.*

Рассматривая расположение рельсовых путей, мы познакомились с важными словами «достаточно» и «необходимо», установили, какие зависимости эти слова характеризуют. Внимательному читателю бросилось в глаза еще одно важное слово: «только». Следующие примеры иллюстрируют большую роль этого маленького слова.

(10) *Если четырехугольник ABCD — дельтоид, то его диагонали взаимно перпендикулярны.*

(11) *Только если четырехугольник ABCD — дельтоид, то его диагонали взаимно перпендикулярны.*

Высказывания (10) и (11) отличаются друг от друга лишь словом «только». Однако добавление этого маленького слова меняет очень многое: высказывание (10) — верное, а высказывание (11) — неверное (ложное)*). Иногда говорят, что высказывание (11) является «обращением» высказывания (10), потому что его можно записать в таком виде:

(11а) *Если в четырехугольнике ABCD диагонали взаимно перпендикулярны, то он — дельтоид.*

Задача 4. Определите, какие из следующих высказываний верны.

а) *Если четырехугольник ABCD имеет хотя бы один прямой угол, то он является квадратом.*

б) *Четырехугольник ABCD является квадратом только тогда, когда он имеет хотя бы один прямой угол.*

в) *Только те фигуры, которые имеют равные площади, конгруэнтны.*

г) *Если фигуры конгруэнтны, то их площади равны.*

д) *Только конгруэнтные фигуры имеют равные площади.*

е) *Для всех натуральных чисел a, b верно, что если $a = b$, то $a^b = b^a$.*

ж) *Для натуральных чисел верно, что только если $a = b$, то $a^b = b^a$.*

---

*) По этому поводу мы советуем читателю познакомиться также со статьей Л. Фладе «Маленькие слова с большим значением» («Квант», 1973, № 8).

Соревнование художников

Это соревнование хорошо проводить группой в 5—8 человек. Один ученик внятно произносит последовательно координаты точек, а остальные отмечают точки в прямоугольной декартовой системе координат и соединяют каждую точку с предыдущей отрезком прямой линии. Если точки найдены правильно, то в результате получится схематический рисунок какого-либо животного, птицы.

Вот фигуры для такого соревнования.

1. (—10,0), (—9,1), (—9,4), (—7,3), (—6,4), (3,1), (0,12), (1,14), (5,12), (1,12), (6,0), (4, —3), (—8, —3), (—10,0).

2. (0,0), (—1, —1), (—3,1), (—2,3), (—3,3), (—4,6), (0,8), (2,5), (2,11), (6,10), (3,9), (4,5), (3,0), (2,0), (1, —7), (3, —8), (0, —8), (0, 0).

3. (—1, 4), (5, 2), (5,—1), (4, —1), (4, 1), (3, 1), (3, —5), (2, —5), (2, —2), (1, —1), (—3, —1), (—3, —5), (—4, —5), (—4, 0), (—6, 0), (—6, 4), (—8, 3), (—8, 5), (—5, 6), (—5, 7), (—4, 7), (—4, 2), (—1,4).

4. (2, 5), (2, 0), (8, 0), (10, 1), (9,—3), (4, —3), (0, —2), (0, —3), (—5, —3), (—5, —2), (—1, —1), (—1, 0), (0, 3), (—2, 3), (—2, 5), (—1, 5), (—1, 6), (2, 5).

К статье «Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова»

Математико-механический факультет

1. Если $aq-bp\leqslant 0$, то второй цикл работ не следует начинать; если $aq-bp>0$, то при $p+\frac{aq}{b}\leqslant 200$ второй цикл работ следует прекратить через $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}-\frac{p}{q}\right)$ часов, а при $p+\frac{aq}{b}>200$ — через $\frac{100-p}{q}$ часов. Указание. На промежутке $0\leqslant t\leqslant\frac{100-p}{q}$ надо найти точку, в которой квадратный трехчлен $-bqt^2+(aq-bp)t+ap$ принимает наибольшее значение.

2. Если $a<b+\frac{1}{4}$, то решений нет; если $a=b+\frac{1}{4}$, то $x=-b-\frac{1}{8}$; если $a>b+\frac{1}{4}$, то $x_{1,2}=-b+\left(\frac{-3\pm\sqrt{12(a-b)-3}}{6}\right)^3$. Указание. Записать уравнение в виде системы

$$\begin{cases} u-v=1,\\ u^3-v^3=a-b.\end{cases}$$

3. $$x_1=\frac{(-1)^k}{2}\arcsin\left(3a+1+\sqrt{6a+3}\right)+\frac{k\pi}{2};$$

$$x_2=\frac{(-1)^k}{2}\arcsin\left(3a+1-\sqrt{6a+3}\right)+\frac{k\pi}{2}$$

(k — целое). Если $a<-\frac{1}{2}$ или $a>1$, то решений нет; если $-\frac{1}{2}<a<-\frac{1}{3}$, то имеется две серии решений x_1 и x_2; если $-\frac{1}{3}<a<1$, то имеется одна серия решений x_2; при $a=\frac{-1}{2}$, $a=\frac{-1}{3}$ и $a=1$ решения найдите самостоятельно. Указание. После преобразований для $t=\sin 2x$ получается квадратное уравнение $t^2-2(1+3a)t+(9a^2-2)=0$. Условие разрешимости этого уравнения есть $a\geqslant-\frac{1}{2}$. Не забудьте, что $|t|\leqslant 1$.

4. $\frac{1}{2}\left(b+\sqrt{b^2-a^2}\right)$, $\frac{1}{2}\left(b-\sqrt{b^2-a^2}\right)$.

5. $2\pi R^2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\left(2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

Химический факультет

1. $\frac{p+3q}{50}$ *кг*. 2. $x=1$, $y=2$.

3. $\frac{\pi}{6}+2k\pi$ $(k=0,\pm1,\ldots)$.

4. $\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}$ *с*, $\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}$ *с*.

5. $\frac{\pi a^3}{12\sin^2\frac{\alpha}{2}}\left(3-4\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)$.

Биолого-почвенный факультет

1. 80 *м*³. 2. $0<x\leqslant\frac{3}{2}-\sqrt{2}$ или $x\geqslant\frac{3}{2}+\sqrt{2}$. Указание. Для $y=\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$ получается неравенство $2y^2-5y+2\geqslant 0$, т. е. $\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\geqslant 2$ или $\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\leqslant\frac{1}{2}$. 2а. $x_1=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$, $x_2=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$. Указание. Для $y=x+\frac{1}{2x}$ получается квадратное уравнение $2y^2-5y+2=0$, поэтому $x+\frac{1}{2x}=2$ или $x+\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}$. 3. $(x,y)=(k\pi,k\pi)$ $(k=1,2,\ldots)$. Указание. Из второго уравнения имеем $x=1$ или $\operatorname{tg}y=0$. Но $x=1$ не принадлежит ОДЗ. Если $\operatorname{tg}y=0$, то $y=k\pi$. Ясно, что в ОДЗ входят только $y=\pi$, 2π, 3π, …. Для таких y из первого уравнения получим

$x=y$. 4. $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{3a^2+6b^2-8m_c^2}$; $m_b=\frac{1}{2}\sqrt{3b^2+6a^2-8m_c^2}$. 4а. $\frac{3}{8}R$.

5. $\sqrt{3}\, a \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

Геологический факультет

1. 28 $м^3/мин$. 2. (2,3); ($\log_2 3$,4). 3. $x_1=k\pi$ ($k=0,\ \pm1,\ \ldots$), $x_2=-\frac{\pi}{3}+k\pi$ ($k=0,\ \pm1,\ \ldots$). 4. См. рис. 1. 5. $\frac{a^3\sin\alpha}{\cos(\alpha/2)}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\alpha}$.

Физический факультет

1. $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{v}{\sqrt{u^2-v^2}}$. 2. $u_1=2,\ v_1=1,\ u_2=1,\ v_2=2$. 3. $x=2\pi+4\pi n$ ($n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$). 4. $a=0$. 5. $\frac{15-8\sqrt{2}}{12}\pi\approx0{,}97$.

К статье «Новосибирский государственный университет»

Вариант 1

1. При наличии воды стеклянные пластинки практически не препятствуют распространению света, так как показатели преломления стекла и воды близки и среда оказывается оптически почти однородной (вспомните — погруженное в воду стекло становится невидимым). Без воды возникает большое число отражений от пластин; световой поток резко ослабляется: изображение пропадает.

2. $m=\frac{\mu h}{RT}(pS+Mg)$.

3. $q=\frac{4}{5}UC$.

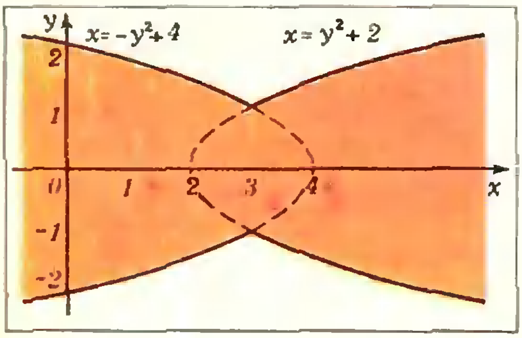


Рис. 1.

4. Из закона сохранения энергии $2\frac{mv^2}{2}=\frac{q^2}{2a}+2\frac{q^2}{a}$ получаем

$$v=q\sqrt{\frac{5}{2am}}.$$

5. Обозначим высоту уровня жидкости над пробкой через H. Запишем условие отсутствия движения пробки: $p_{средн}S\geqslant F_{тр}+pS$, где $p_{средн}=p+\rho g\left(H+\frac{h}{2}\right)$, $S=ah$ (a — ширина пробки), $F_{тр}=k\times(\rho gH+p)la$. Отсюда получаем

$$H\geqslant\frac{kpl-\rho gh^2/2}{\rho g(h-kl)}$$

при

$$kl<h<\sqrt{\frac{2kpl}{\rho g}}\ \text{или}\ \sqrt{\frac{2kpl}{\rho g}}<h<kl.$$

6. $t=2a/v$. Указание. Удобнее всего решать задачу в системе отсчета, связанной с центром масс системы шарик — рамка.

Вариант 2

1. «Водолаз» плавает, когда его вес равен весу вытесненной воды. Если игрушка сделана из эластичного материала (например, из резины), то, сдавливая ее (поддувая воздух через трубку), можно заставить «водолаза» тонуть (при уменьшении объема уменьшается выталкивающая сила). По мере погружения увеличивается гидростатическое давление, которое дополнительно сжимает игрушку. Существует критическая глубина, начиная с которой уже без поддува «водолаз» сжат настолько, что выталкивающая сила меньше веса «водолаза». Если игрушка уже достигла критической глубины, то при освобождении трубки она будет продолжать тонуть. Если «водолаз» еще не дошел до критической глубины, он начнет всплывать.

2. $U_{12}=IR/15$.

3. Из-за отсутствия трения силы реакции $\mathbf{N}_A$ и $\mathbf{N}_B$ направлены по соответствующим радиусам. Условия равновесия обруча дают

$$N_A=\frac{P\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\ \text{и}\ N_B=\frac{P\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

при $\alpha+\beta<\pi$.

4. $h=\frac{2u\,|v\cos\alpha-u|\operatorname{tg}^2\alpha}{g}$.

5. Внутренняя энергия, а значит, и температура газа будут увеличиваться до тех пор, пока скорости обоих поршней не станут одинаковыми и равными $2v$. Поэтому разумно решать задачу в системе отсчета, движущейся вправо со скоростью $2v$. Запи-

сав закон сохранения энергии $2\frac{mv^2}{2}+cT_0=\\=\acute{c}T$, получаем

$$T=T_0+\frac{mv^2}{c}.$$

6. При движении прута в нем возникает э. д. с. индукции, мгновенное значение которой $\mathscr{E}=B\frac{\Delta S}{\Delta t}=Bvh=Bv^2t\operatorname{tg}\alpha$ ($h=vt\operatorname{tg}\alpha$ — перемещение прута за время t). Мгновенное значение тепловой мощности равно $P(t)=\frac{\mathscr{E}^2}{R}=\frac{B^2v^4t^2\operatorname{tg}^2\alpha}{rvt\operatorname{tg}\alpha}=\frac{B^2v^3\operatorname{tg}\alpha}{r}t$ ($R=rvt\operatorname{tg}\alpha$ — сопротивление цепи). Полное количество теплоты, выделяющееся в цепи за время $T=\frac{l}{v}$ — время движения прута от точки A до точки C, равно

$$Q=P_{\text{средн}}T=\frac{P(T)}{2}T=\frac{B^2l^2v\operatorname{tg}\alpha}{2r}.$$

Вариант 3

1. При нагревании воздуха его плотность уменьшается ($\rho=p\mu/RT$) и начинается конвекция: менее плотный нагретый воздух, обедненный кислородом, поднимается вверх. На его место поступает более холодный воздух, обеспечивая приток к пламени необходимого для его горения кислорода. Эти встречные потоки воздуха тормозят друг друга и частично перемешиваются. При нехватке кислорода пламя коптит (содержит большое количество несгоревшего, неокислившегося углерода — сажи).

Трубка создает заметный ток воздуха, обусловленный разностью давлений на ее концах; при этом взаимодействие с противотоком отсутствует. Это обеспечивает большую скорость тока (воздух в восходящую струю попадает лишь снизу, где давление максимально) и отсутствие попадания продуктов сгорания в подтекающую струю. Когда же трубка закрыта, нагретый воздух начинает течь вдоль внешней поверхности трубки, что ощутимо ограничивает доступ свежего воздуха. Пламя может даже погаснуть.

2. $A=\rho gh^3(H-h/2)$.

3. $q_1=C_1U;\quad q_2=\frac{C_2U}{1+R_2/R_1};$

$$q_3=\frac{C_3U}{1+R_1/R_2}.$$

4. На бусинку действуют сила тяжести $m\mathbf{g}$ и силы натяжения $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$ (рис. 2), причем силы натяжения одинаковы по абсолютной величине (поскольку нить невесома). Отсюда $\widehat{ACD}=\widehat{DCE}$, $AD=DE=x$ и $AC=CE$. Из подобия треугольников DEC и BEF следует, что $AC=Lx/l$, где $L=\\=AC+CB$ — длина нити. По теореме Пифагора для треугольника BEF имеем: $EF^2+\\+FB^2=EB^2$, или $(l-2x)^2+h^2=(L-\\-2Lx/l)^2$, откуда

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\left(l\pm\frac{h}{\sqrt{(L/l)^2-1}}\right).$$

5. Согласно первому закону термодинамики $Q=\Delta U+A$. Изменение внутренней энергии $\Delta U=c(T_M-T_K)$. Из уравнения состояния идеального газа $T_M=\frac{p_1V_2}{R}$ и $T_K=\\=\frac{p_1V_1}{R}$, поэтому $\Delta U=\frac{cp_1}{R}(V_2-V_1)$. Работу A, совершенную газом при расширении от объема V_1 до объема V_2, можем найти графически (см. рис. 9 в статье): $A=p_{\text{средн}}\times\\\times(V_2-V_1)=\frac{1}{2}(p_1+p_2)(V_2-V_1)$. Тогда окончательно для количества теплоты Q, поглощенного газом, имеем

$$Q=\Delta U+A=$$

$$=(V_2-V_1)\left[p_1\left(\frac{c}{R}+\frac{1}{2}\right)+\frac{p_2}{2}\right].$$

6. Запишем законы сохранения энергии и импульса для системы шарик — сфера:

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{mv_1^2}{2}+\frac{Mv_2^2}{2}+\frac{Qq}{R},$$

$$mv=mv_1+Mv_2.$$

Здесь v_1 — скорость шарика и v_2 — скорость сферы в тот момент, когда шарик влетает в первое отверстие сферы. Внутри сферы электрического поля нет, поэтому шарик движется от одного отверстия до другого прямолинейно и равномерно с относительной скоростью $v_{\text{отн}}=v_1-v_2$. Время его движения равно

$$t=\frac{2R}{v_1-v_2}=$$

$$=\frac{2R}{\sqrt{v^2-\left(1+\frac{m}{M}\right)\frac{2Qq}{Rm}}}.$$

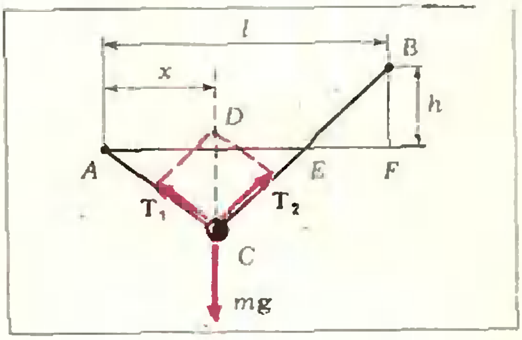


Рис. 2.

причем $\frac{Mm}{M+m}\frac{v^2}{2} > \frac{Qq}{R}$.

К статье «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова»
(См. «Квант» № 3)

Математика

Механико-математический факультет

1. При любом x имеем $x^2+4x+6=(x+2)^2+2>1$, поэтому область допустимых значений неравенства совпадает с множеством всех действительных чисел. Представим левую часть неравенства в виде $2t^2+6t$, где $t=\sqrt{\log_3(x^2+4x+6)}$. Пользуясь тем, что неравенство $2t^2+6t\geqslant 8$ имеет решения $t\leqslant -4$, $t\geqslant 1$, а также тем, что множество значений функции $\sqrt{\log_3(x^2+4x+6)}$ лежит в области положительных чисел, найдем, что неравенство $\sqrt{\log_3(x^2+4x+6)}\geqslant 1$ равносильно исходному. Левая и правая части этого неравенства положительны при всех x, поэтому оно равносильно неравенству $\log_3(x^2+4x+6)\geqslant 1$, а последнее, в свою очередь, неравенству $x^2+4x+6\geqslant 3$ (мы воспользовались тем, что логарифмическая функция с основанием 3 монотонно возрастает). Решая последнее неравенство, находим ответ: $x\leqslant -3$, $x\geqslant -1$.

2. Обозначив $2^{x^2+(y+1)^2}$ через t, найдем из первого уравнения системы, что $t^2-32=31t$. Этому равенству удовлетворяют только два числа: -1 и 32. Поскольку $t>0$, то $t=32$, откуда $x^2+(y+1)^2=5$.

Далее, из второго уравнения системы получаем, что при некотором целом K выполняется равенство $\pi\cdot(x^2+y^2)=2\pi K$, или $x^2+y^2=2K$, откуда следует, что $K\geqslant 0$. С другой стороны, имеем: $x^2+(y+1)^2-(x^2+y^2)=2y+1=5-2K$, откуда $y=2-K$. С учетом условия $y\geqslant 0$ получаем: $K_1=0$, $K_2=1$, $K_3=2$. Теперь $x=\pm\sqrt{6K-4-K^2}$, отсюда находим ответ: $(1,1)$, $(-1,1)$, $(2, 0)$, $(-2, 0)$.

3. $(\alpha-\beta)/2$. Указание. Точка K равноудалена от прямых AP и AD, поэтому прямая AK является биссектрисой угла PAD.

4. $SD=9$. Указание. Рассматривая сечение пирамиды и шара плоскостью ASK, легко найти, что $AB=6$. Далее легко показать, что точки M и N равноудалены от точки K. Найдутся два положения точек M и N в треугольнике ABC ($MN=5$), лишь при одном из них плоскость пересечет продолжение SK за точку K.

5. Решая уравнение $\sin x-\cos 6x=\sin 3x-\cos 8x$, получаем серии: $x_1=K\pi$, $x_2=(4K-1)\pi/10$, $x_3=(4K+3)\pi/18$ (K — целое). В промежуток $(-4; -2{,}5)$ попадают $-\pi$, $-9\pi/10$, $-7\pi/6$, $-17\pi/18$, из которых только $-9\pi/10$ и $-7\pi/6$ лежат в ОДЗ (в ходе решения требуется доказать неравенство $\sin\frac{\pi}{18}>\frac{1}{6}$).

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. $x\leqslant -5$, $1\leqslant x<\frac{8+\sqrt{22}}{3}$. 2. $x_1=-\frac{2}{7}$, $y_1=\pm\arcsin\frac{2\sqrt{7}}{7}+K\pi$; $x_2=\frac{-2-3\pi}{7}$, $y_2=\pm\arcsin\sqrt{\frac{4-\pi}{7}}+K\pi$, $K=0, \pm1, \pm2, \ldots$ 3. $\frac{d-\sqrt{d^2-c^2}}{2}$, $\frac{d+\sqrt{d^2-c^2}}{2}$. 4. 42 *м*. 5. $2r^2\sqrt{3}$.

Физический факультет

1. $x=\frac{-2+K\pi}{5}$, $K=0, \pm1, \pm2, \ldots$

2. $x=3$. 3. $\frac{3}{7}<x<\log_5 2$, $x>1$.

4. $\frac{8}{5}b^2\sqrt{11}$. 5. $\frac{a\sqrt{137}}{\sqrt{12}}$. Указание. Центр искомого шара является и центром шара, описанного около пирамиды $KLMN$.

Биологический факультет

1. 65 деталей в час. 2. $p=1$. Указание. Дискриминант квадратного уравнения должен быть равен нулю. 3. $AM=17/4$. 4. $x_1=\pi+2k\pi$, $x_2=\pm(\pi/2)+2k\pi$, $x_3=\pm(\pi/6)+2k\pi$, где $k=0$, ±1, ±2,… 5. Все целые числа n, удовлетворяющие условию $-1\leqslant n\leqslant 13$. Указание. Данное неравенство выполняется, если или

$$\begin{cases} 2\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{5}-n+13>1, \\ 0<\frac{\sqrt{16-n}}{\sqrt{n+11}+1}\leqslant 1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 0<2\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{5}-n+13<1, \\ \frac{\sqrt{16-n}}{\sqrt{n+11}+1}>1. \end{cases}$$

Нужно заметить, что $\mathrm{tg}(\pi/6)<\mathrm{tg}(\pi/5)<\mathrm{tg}(\pi/4)$, а потому $1<2\,\mathrm{tg}(\pi/5)<2$.

Химический факультет

1. $0 \leqslant x < 4$. 2. Январская добыча второй шахты больше январской добычи первой шахты на 3100 *т*.

3. $9(11+4\sqrt{6}):50$.

4. $R^3\sqrt{6}/4$.

5. $2k\pi < a \leqslant 2k\pi + \pi$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$ Указание. Из второго уравнения системы следует, что $x > 0$, $0 < y < a$ и $a - y = x$. С учетом последнего равенства первое уравнение системы принимает вид $\sin 3x + 3\sin x = 0$, или $\sin x\,(3-2\sin^2 x) = 0$, откуда $\sin x = 0$, т. е. $x = n\pi$, где n — натуральное число. Таким образом, при $a \leqslant 0$ данная система решений не имеет, а при фиксированном $a > 0$ имеет решения $x = n\pi$, $y = a - n\pi$, где n — натуральное число, удовлетворяющее неравенству $0 < n < a/\pi$. Остается более точно подсчитать зависимость числа решений от значения a и определить, при каких $a > 0$ эта система имеет четное число решений.

Факультет почвоведения

1. 1/3 всей работы. 2. $x = \pm(\pi/6) + k\pi$, где $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ Указание. Представьте данное выражение в форме $-\cos^2 2x + \cos 2x + 3$ и найдите наибольшее значение квадратного трехчлена $-z^2 + z + 3$ на отрезке $-1 \leqslant z \leqslant 1$. 3. $x_1 = 1/3$, $x_2 = 5/3$. 4. $2(6+4\sqrt{3})/3$. Указание. Докажите, что радиус второй окружности также равен 1 и что упомянутый в условии задачи отрезок есть отрезок от вершины острого угла параллелограмма до ближайшей к ней точки касания. Убедитесь, что длина отрезка стороны параллелограмма от вершины тупого угла до ближайшей к ней точки касания равна $\sqrt{3}/3$. 5. Указание. Заметьте, что $\cos(15/7) < 0$. Докажите, что неравенство $z + \frac{3}{z} < 4$ справедливо при $1 < z < 3$. Покажите, что $1 < \log_2 7 < 3$.

Геологический факультет

1. $x = k\pi$, где $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ 2. 10 *м³/час*. 3. $1/2 < x < 1$, $\left(\sqrt[3]{10}+1\right)/2 < x < \left(\sqrt[3]{100}+1\right)/2$. Указание. Заметьте, что область допустимых значений неравенства определяется условиями $x > 1/2$, $x \neq 1$. Введите новую неизвестную $z = \log_{10}(2x-1)^3$. 4. $44\sqrt{2}/45$. Указание. Для отыскания длины отрезка DE используйте свойство биссектрисы внутреннего угла треугольника и свойство касательной и секущей, проведенных к одной окружности. 5. $6 - \sqrt{4\sqrt{5}-8} < x \leqslant 7$. Указание. Заметьте, что область допустимых значений неравенства есть отрезок $5 \leqslant x \leqslant 7$. Покажите, что неравенство

$$-\sqrt{x-5} + \sqrt{-x+7} \leqslant 0$$

выполнено при $6 \leqslant x \leqslant 7$, так что этот отрезок входит в решение рассматриваемого в задаче неравенства. На отрезке $5 \leqslant x \leqslant 6$ обе части неравенства неотрицательны, и потому допустимо возведение обеих его частей в квадрат. Далее введите новую неизвестную $z = \sqrt{(x-5)(-x+7)}$, причем интерес представляют только значения $0 \leqslant z \leqslant 1$.

Географический факультет

1. 40 *м/мин*. 2. $x = \pm(2\pi/3) + 2k\pi$, где $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ 3. $x = 2$. 4. $4\sqrt{3} : 7\pi$. Указание. Используя свойство биссектрисы внутреннего угла треугольника BAP, покажите, что $\sphericalangle ABP = 30^\circ$. Докажите, что $AM = BP$, а потому $\triangle AMB = \triangle APB$. 5. $x = 2\pi/3$, $y = 7 - 2\pi$.

Физика

Механико-математический факультет и факультет вычислительной математики и кибернетики

1. Центростремительное ускорение точек обода вала равно $a_ц = v^2/R$, где v — линейная скорость этих точек. Поскольку веревка по валу не скользит, линейная скорость v равна скорости разматывания веревки, т. е. скорости движения груза $v_г$. Эту скорость можно найти из известных соотношений для равноускоренного движения без начальной скорости:

$$h = at^2/2 \quad \text{и} \quad v_г = \sqrt{2ah_1}, \quad \text{где } h_1 = h/2.$$

Тогда окончательно

$$a_ц = \frac{2h^2}{Rt^2} = 0{,}8\ м/сек^2.$$

2. Обозначим через v_0 начальную скорость, h_0 — максимальную высоту подъема и через v — скорость тела на высоте h, соответствующей равенству его кинетической и потенциальной энергий: $mv^2/2 = mgh$ (m — масса тела).

С другой стороны, по закону сохранения энергии $mv^2/2 + mgh = mv_0^2/2$. Из этих уравнений можно найти высоту h: $h = \frac{v_0^2}{4g}$. Теперь определим максимальную высоту, на которую поднимается тело при данном угле α и начальной скорости v_0. По закону сохранения энергии $mv_0^2/2 = mgh_0 + m(v_0\cos\alpha)^2/2$ (скорость в верхней точке равна $v_0\cos\alpha$), откуда $h_0 = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$. Очевидно, условие задачи может быть выполнено, если

$$h \leqslant h_0, \text{ т. е. } \frac{v_0^2}{4g} \leqslant \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

Отсюда $\sin\alpha \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$, и $\alpha_{min} = 45°$.

3. При отсутствии тепловых потерь производительность дистиллятора определяется только мощностью нагревателя. Действительно, масса Δm испарившейся (дистиллированной) воды зависит от количества выделившейся теплоты: $\Delta m\lambda = U^2\Delta t/R$. Здесь λ — удельная теплота парообразования воды, R — сопротивление нагревателя, U — напряжение сети, к которой подключают дистиллятор. Тогда $q = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{U^2}{R\lambda}$. Найдем производительности дистиллятора для каждой спирали в отдельности: $q_1 = \frac{U^2}{R_1\lambda}$ и $q_2 = \frac{U^2}{R_2\lambda}$, для последовательно соединенных спиралей $(R_3 = R_1 + R_2)$: $q_3 = \frac{U^2}{(R_1+R_2)\lambda}$ и для параллельно соединенных спиралей $\left(R_4 = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\right)$:

$$q_4 = \frac{U^2(R_1+R_2)}{R_1R_2\lambda}. \text{ Отсюда}$$

$$\frac{q_4}{q_3} = \frac{(R_1+R_2)^2}{R_1R_2} = \frac{(q_1+q_2)^2}{q_1q_2} = 4{,}5.$$

4. При изменении магнитного потока в катушке возникает электродвижущая сила индукции $\mathscr{E}_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, и по замкнутой катушке течет ток $I = \frac{\mathscr{E}_i}{R} = -\frac{1}{R}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$. По условию задачи магнитное поле убывает равномерно. Это значит, что через катушку течет постоянный ток, поэтому величина протекшего заряда $q = I\Delta t = -\frac{1}{R}\Delta\Phi$. Изменение магнитного потока $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = -BSN = -BN\pi d^2/4$. Таким образом,

$$q = \frac{B\pi d^2 N}{4R} \approx 5\cdot10^{-3} \text{ к}.$$

5. Обозначим расстояние от кадра до объектива через d, а расстояние от объектива до экрана через f. Линейное увеличение объектива $\Gamma = \frac{f}{d}$. Кроме того, $d + f = L$. Отсюда $d = \frac{L}{1+\Gamma}$ и $f = \frac{\Gamma L}{1+\Gamma}$.

Теперь, применив формулу линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f},$$

найдем фокусное расстояние объектива: $F = \frac{df}{d+f} = \frac{\Gamma L}{(1+\Gamma)^2}$, где $\Gamma = \frac{4 \text{ м}}{4\cdot10^{-3} \text{ м}} = \frac{3 \text{ м}}{18\cdot10^{-3} \text{ м}} \approx 166{,}7$. Окончательно

$$F = \frac{\Gamma L}{(1+\Gamma)^2} \approx 10 \text{ см}.$$

6. Построим изображение предмета в данной оптической системе. Ход лучей показан на рисунке 3. Из подобия треугольников $A_1O_1B_1$ и $A_2O_2B_2$ следует, что $\frac{a}{x} = \frac{F_1}{F_2}$. Отсюда длина изображения x равна

$$x = a\frac{F_2}{F_1} \approx 1{,}2 \text{ см}.$$

Заметим, что решение то же, если $l < F_1$.

Физический факультет

1. По закону сохранения энергии

$$mgl + mg\frac{l}{2} - 2mg\frac{l}{2} = \frac{m\omega^2l^2}{2} + \frac{m\omega^2(l/2)^2}{2} + \frac{2m\omega^2(l/2)^2}{2}.$$

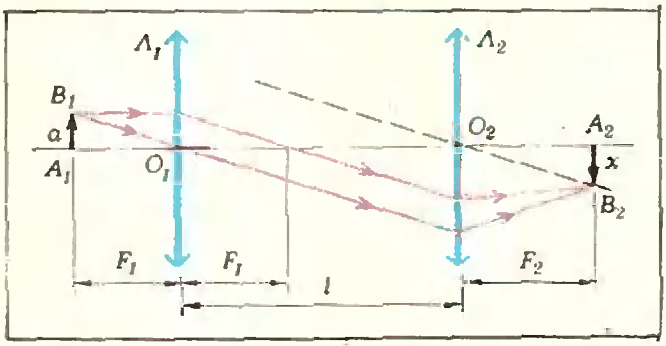


Рис. 3.

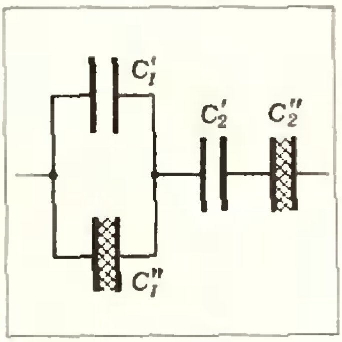


Рис. 4.

Отсюда находим угловую скорость ω и подставляем в выражение для искомой линейной скорости:

$$v = \omega \frac{l}{2} = \sqrt{\frac{gl}{7}}.$$

2. Запишем закон Менделеева — Клапейрона для сухого воздуха и водяного пара, находящихся в сосуде:

$$p_в V = \frac{m_в}{\mu_в} RT, \qquad (1)$$

$$p_п V = \frac{m_п}{\mu_п} RT. \qquad (2)$$

Все величины с индексом «в» относятся к воздуху, а с индексом «п» — к парам воды. По закону Дальтона давление в сосуде равно сумме парциальных давлений содержащихся в нем газов:

$$p_в + p_п = p_0. \qquad (3)$$

Согласно определению относительной влажности давление насыщающего водяного пара $p_н$ равно

$$p_н = \frac{p_п}{\varepsilon} 100, \qquad (4)$$

и по условию задачи

$$m_в + m_п = M. \qquad (5)$$

Из системы уравнений (1) — (5) находим

$$p_н = \frac{100}{\varepsilon(\mu_в - \mu_п)} \left(p_0 \mu_в - \frac{MRT}{V} \right).$$

3. При последовательном соединении конденсаторов суммарная емкость $C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$. Представим данное соединение конденсаторов (см. рис. 2 в статье) в виде эквивалентной схемы, изображенной на рисунке 4. Из схемы ясно, что

$$C_1 = C_1' + C_1'' = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon (S/2)}{d} + \frac{\varepsilon_0 (S/2)}{d} = \frac{\varepsilon_0 S}{2d} (\varepsilon + 1),$$

$$\frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_2'} + \frac{1}{C_2''} = \frac{d/2}{\varepsilon_0 \varepsilon S} + \frac{d/2}{\varepsilon_0 S}.$$

Тогда окончательно

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \frac{2\varepsilon(\varepsilon + 1)}{(\varepsilon + 1)^2 + 4\varepsilon}.$$

4. Ход лучей через призму показан на рисунке 5. Из треугольника AOO' $L \operatorname{tg} \delta = a + d$, где $\delta = \beta - \alpha$ (см. рис. 6). Согласно закону преломления угол падения α и угол преломления β связаны соотношением $\sin\alpha / \sin\beta = 1/n$. Поскольку углы α, β и δ малы, можно считать, что $\operatorname{tg}\delta = \delta$, $\sin\alpha = \alpha$ и $\sin\beta = \beta$. Тогда получаем $L\delta = a + d$ и $\delta = \alpha(n - 1)$. Отсюда

$$\alpha = \frac{a + d}{L(n-1)} = \frac{3}{57} \text{ рад} \approx 3^\circ.$$

5. Из-за присутствия плоскопараллельной пластинки световой пучок в месте нахождения фотоэлемента становится шире (рис. 7), и поэтому полностью фотокатодом не перекрывается. Согласно закону фотоэффекта величина фототока пропорциональна световому потоку, падающему на фотокатод. Следовательно, гальванометр покажет ток I_1 такой, что $\frac{I_1}{I} = \frac{d^2}{d_1^2}$, где d_1 — новый диаметр светового пучка. Из рисунка 7 видно, что $d_1 = d + 2a$, где $a = H(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) = H \operatorname{tg}\alpha \left(1 - \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}\right) = H \frac{D/2}{F} \left(1 - \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}\right)$. Поскольку $D \gg F$, можно считать, что $\operatorname{tg}\beta / \operatorname{tg}\alpha = \sin\beta / \sin\alpha = 1/n$. Окончательно получим

$$I_1 = I \frac{d^2}{d_1^2} = I \frac{d^2}{\left[d + H \frac{D}{F} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right]^2}.$$

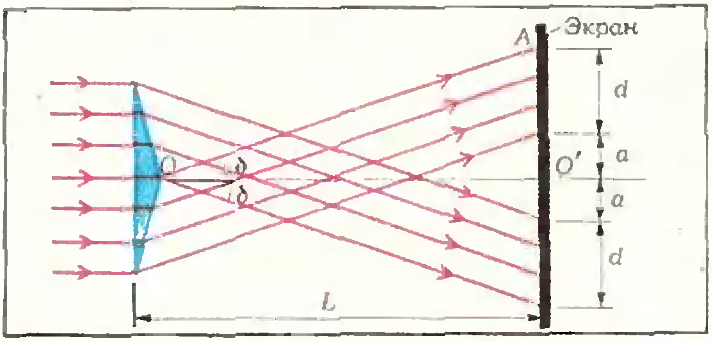


Рис. 5.

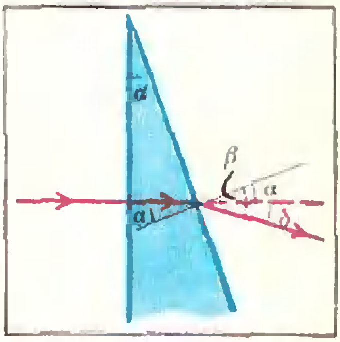


Рис. 6.

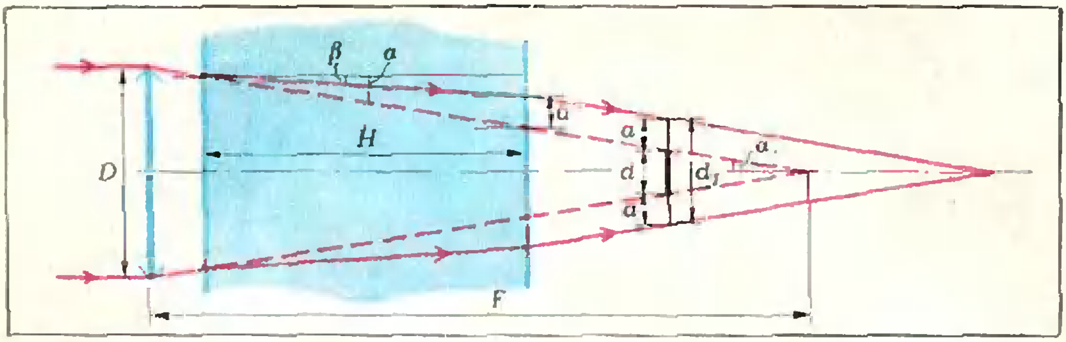


Рис. 7.

Химический факультет

1. $h = \frac{3}{8}\frac{v^2}{g} \approx 0{,}6$ *м*.

2. $v = 2\sqrt{\frac{3}{5}gl} \approx 4{,}2$ *м/сек*.

3. $m_л = m_в \frac{c_в(t_в - t)}{c_л(t_0 - t_л) + r + c_в(t - t_0)} = 0{,}22$ *кг* (здесь $t_0 = 0°$ С — температура плавления льда).

4. $A = \frac{q \cdot |q_1|}{\pi\varepsilon_0 l}\left(\sqrt{2} - 1 - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

5. $\varphi_C = \frac{2\varphi_A\varphi_B}{\varphi_A + \varphi_B} = 24$ *в*.

6. $l = {}^3/_2 F$. Указание. См. рис. 8.

Биологический, географический, геологический факультеты и факультет почвоведения

1. $T = \frac{m(g+a)}{2\cos\alpha}$.

2. $n = \frac{V + V_0}{V} = 1{,}2$.

3. $\tau_2 = \tau_1 \frac{\lambda}{c(t_к - t_1)} \approx 30$ *мин* (здесь $t_к = 100°$ С — температура кипения воды).

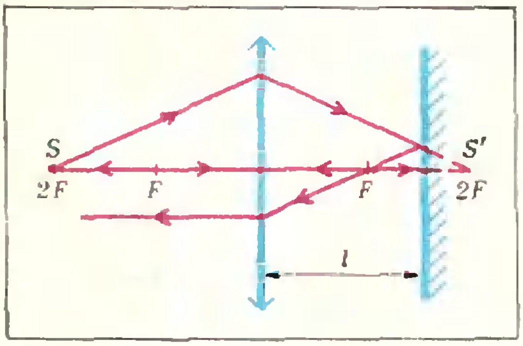


Рис. 8.

4. $U_C = \frac{2}{3}\mathscr{E} = 8$ *в*.

5. Изображение меньше предмета в 4 раза.

К статье «Ошибки Степы Мошкина»

(см. «Квант» № 3)

1. а) Да. б) Да.

2. Параллелограмм — обобщение понятий ромба, прямоугольника, квадрата, так как множество параллелограммов шире, чем множества ромбов, прямоугольников, квадратов. Ромб и прямоугольник — обобщение квадрата.

3. Оба высказывания неверны. Пересечением множества ромбов и множества прямоугольников является множество квадратов.

4. а) Исключение из степиного определения параллелограмма свойств (2)—(5) к новому понятию не приведет, так как свойства (2)—(5) — следствия свойства (1).

б) Да.

5. Да, так как легко доказать, что если в параллелограмме две смежные стороны конгруэнтны, то конгруэнтны все стороны.

6. $У$ — новое понятие — обобщение понятия параллелограмма, так как в множество четырехугольников, имеющих пару конгруэнтных углов, кроме параллелограммов входят, например, и равнобедренные трапеции. Таким образом, $П \subset У$.

7. Нет. Всякий параллелограмм имеет центр симметрии, и всякий четырехугольник, имеющий центр симметрии, — параллелограмм. Таким образом, не всякая замена свойств, входящих в определение понятия, приводит к новому понятию.

8. Указание. Достаточно проверить свойство лишь для первых 4 строк, по ним легко заполняются остальные. (См. таблицу на с. 64.)

9. Степа определил понятие не трапеции, а многоугольника, обладающего указанными им свойствами 1 и 2. Это произошло потому, что вместо множества четырехугольников он указал более широкое множество многоугольников.

Свойства	Центральная симметрия	Поворот на угол α ($\alpha \neq 180°$)	Параллельный перенос на ненулевое расстояние
1	Да	Нет	Да
2	Да	Да	Нет
3	Да	Да	Нет
4	Нет	Да (при $\alpha = 120°$)	Нет

10 а) Нового понятия не получится, так как всякий четырехугольник с конгруэнтными сторонами—ромб Это объясняется тем, что в определении ромба в учебнике сделано отступление от минимальности числа свойств, указываемых в определении (достаточно было бы указать, что *ромб — это параллелограмм, две смежные стороны которого конгруэнтны*)

б) Да Новому определению удовлетворяет, например, правильный шестиугольник

К задачам «Квант» для младших школьников (*см «Квант» № 3*)

1 Надо 35 точек соединить отрезками так, чтобы каждая была соединена с 11 другими Тогда концов отрезков будет 35 11, но это число — нечетное

2 Уровень воды понизился

3 Девять задач Решение Пусть было предложено a задач Тогда работ, в которых все задачи решались, будет не более $a+1$ (от a плюсов и 0 минусов до 0 плюсов и a минусов), работ, в которых лишь одна задача не решалась (одна оценка «ноль»), будет не более a (от $a-1$ плюсов и 0 минусов до 0 плюсов и $a-1$ минусов) и т д Сумма $(a+1)+a+\ \ +1$ равна $\dfrac{(a+1)(a+2)}{2}$

При $a=9$ будет $\dfrac{10\ 11}{2}=55$

4 Сверху в бутылке находится масло Но если закрытую бутылку перевернуть «вверх ногами», то внизу, у горлышка, окажется уксус Так что можно выливать из бутылки и масло, и уксус

К кроссворду (см. с. 19)

По вертикали 1 Слоноуи 2 НОТКА 3 Делец 4 Каракуль 5 Анаконда 6 Федот 7 Амазонка 8 Килозаяц 9 Леший 10 Карбонарий 11 Овал 12. Тире 13 Атлас 14 Озноб 15 Яровая 16 Кулон 17 Нокалф 18 Вокал.

По горизонтали 1 Бангладеш 2 Деканат 3 Ломбард 4 Эвакуация 5 Кафтан 6 Скалка 7 Закладка 8 Лошадник 9 Набла 10 Выводок 11 Яичница 12 Агнец 13 Весталка 14 Опечатка 15 Ядрон 16 Окуляр. 17 Огниво 18 Листва 19 Бамбук

Подвиг, который будет жить в веках

15 лет прошло с того дня, когда советский космический корабль «Восток» поднял в заоблачные высоты первого космонавта Юрия Гагарина Человек впервые оказался один на один с космическим пространством Героический полет был завершен успешно

15 лет — небольшой для истории срок Но как много сделано за это время в области исследования и использования космического пространства! Более тридцати советских космонавтов совершили свои полеты на кораблях «Восток», «Союз» и космических станциях «Салют», а некоторые из них уже дважды побывали в космическом пространстве Интенсивно развиваются исследования Луны и планет Солнечной системы Космические исследования приобрели международный характер Успешно осуществляются научные программы «Интеркосмос», завершена первая советско-американская космическая программа «Союз — Аполлон»

Полет Юрия Гагарина был отмечен выпуском большого количества почтовых марок во многих странах О некоторых из этих марок мы рассказали в четвертом номере нашего журнала за 1973 год Отдавая дань глубокого уважения подвигу Гагарина, многие страны продолжают выпускать почтовые марки, посвященные его полету Особенно много таких марок было выпущено в 1971 году, к десятой годовщине полета Мы приводим здесь советские и иностранные марки с изображением Юрия Гагарина и космического корабля «Восток», выпущенные после 1970 года

В Лешковецев

Номер оформили художники
Е Верентинова В Карцев, Г Красиков
Э Назаров

Корректор Л Н Боровина

113035, Москва Ж 35, Б Ордынка 21/16
«Квант», тел 231 83 62 Сдано в набор 21/I 76 г
Подписано в печать 5/III 76 г
Бумага 70×108¹/₁₆ Физ печ л 4
Усл печ л 5,2 Уч изд л 6 07 Т 05619
Цена 30 коп Заказ 36 Тираж 326 855 экз

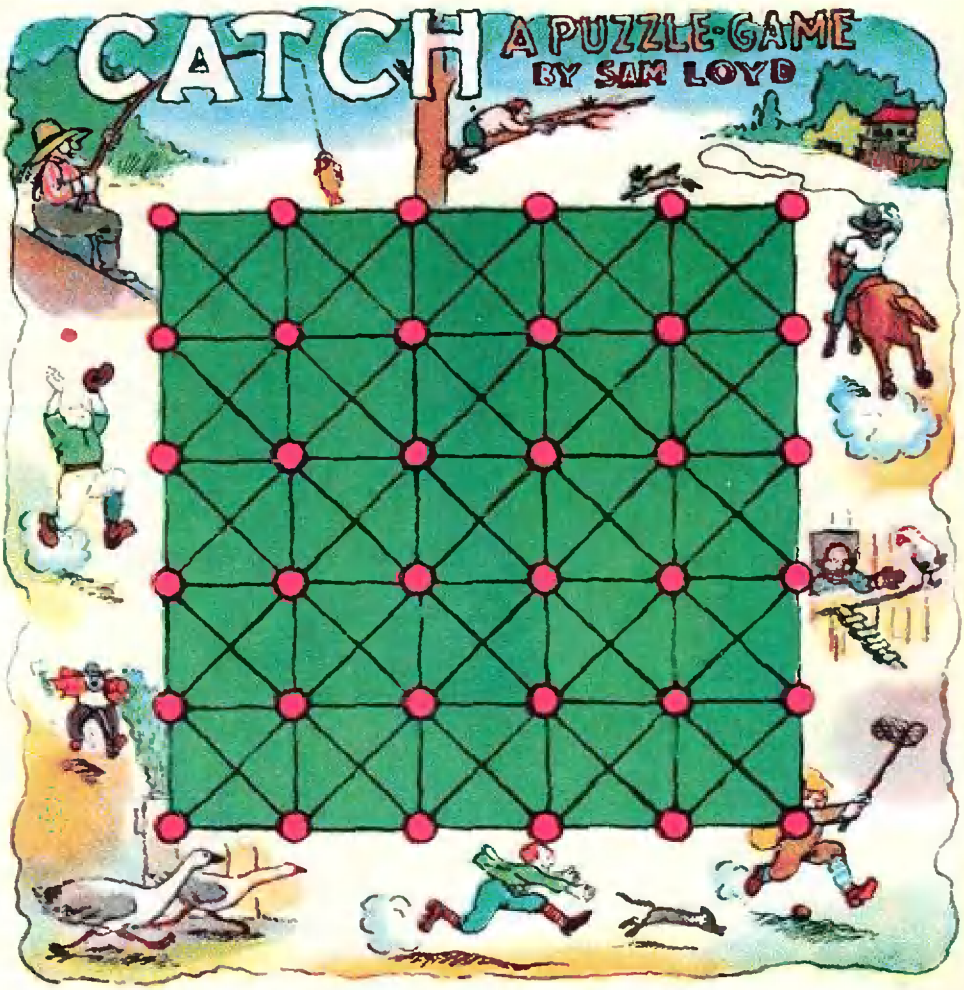
Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств
полиграфии и книжной торговли, г Чехов
Московской области

Рукописи не возвращаются

Уголок коллекционера

Цена 30 коп.
Индекс 70465

Головоломка Сэма Лойда



Игра — «Ловля»

Игроки берут по десять фишек и ставят их по очереди. Начинающий ставит свою на любое из 36 полей. Его партнер также ставит фишку, но старается, чтобы она не попала на одну прямую с фишкой противника. Если же она все-таки попадет на одну прямую с фишкой противника, тот ее берет и ставит взявшую фишку на ее место. Игрок берет подряд столько фишек противника, сколько может. Взяв фишку, игрок снова делает ход, ставя еще одну фишку. Чтобы победить, игрок должен взять все фишки противника.

Головоломка — «Ловля»

Нужно поставить шесть фишек так, чтобы никакие две не были на одной прямой.